Άλγεβρα

Β΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων

lisari.blogspot.gr

lisari team

Εκφωνήσεις-Λύσεις

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 06 – 11 -2014)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του δικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

2η έκδοση: 06 – 11 – 2014 *(συνεχής ανανέωση)*

(προστέθηκαν 9 θέματα: 30 -11 – 2014)

Περιεχόμενα

Σελίδες

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog **http://lisari.blogspot.gr** ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος.** Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari ***team***

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστασίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων
Άλγεβρα Β΄ τάξης

30 Νοεμβρίου 2014

Λύτες

Γιάννης Ζαμπέλης
Γιάννης Κάκανος
Θανάσης Νικολόπουλος
Μαρία Παπαδομανωλάκη
Δημήτρης Παπαμικρούλης
Νίκος Σπλήνης
Αντώνης Σπυριδάκης
Παύλος Τρύφων
Μάκης Χατζόπουλος

Έλεγχος

Κεφάλαιο 1ο
Σήφης Βοσκάκης
Γιάννης Κάκανος

Κεφάλαιο 2ο
Βασίλης Αυγερινός
Σταύρος Χαραλάμπους

Κεφάλαιο 3ο:
Δημήτρης Δούδης
Δημήτρης Παπαμικρούλης

Συντονιστής

Παύλος Τρύφων

Εξώφυλλο

Μιχάλης Νάννος

Πρόλογος
Ανδρέας Κουλούρης

Επιμελητής

Μάκης Χατζόπουλος

lisari team
η καλύτερη ομάδα λόγω…team_ής!

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Συστήματα - Ορίζουσες

Για την γενική επίλυση του συστήματος $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ ορίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

Για το σύστημα ισχύει ότι:

- Αν $D \neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση, την $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$ τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Παραμετρικό σύστημα

Παραμετρικό λέγεται το σύστημα που οι συντελεστές του δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά εξαρτώνται από ένα γράμμα μ, λ κτλ που λέγεται παράμετρος.

Για την λύση – διερεύνησή του, εργαζόμαστε ως εξής:

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και τις παραγοντοποιούμε.
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

  α) Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

  β) Αν $D = 0$, βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου που συμβαίνει αυτό και αντικαθιστούμε στο σύστημα και βλέπουμε αν είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (***Προσοχή!*** *Στην περίπτωση των απείρων λύσεων θα πρέπει να δίνουμε τη γενική μορφή της λύσης).*

Γραμμικό σύστημα 3x3

Για τη επίλυση ενός τέτοιου συστήματος εργαζόμαστε με την μέθοδο της αντικατάστασης.

Μη γραμμικό σύστημα

Για τη επίλυση ενός τέτοιου συστήματος εργαζόμαστε με την μέθοδο της αντικατάστασης.

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16950)
α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

Μονάδες 10

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ
α) Για να είναι γραμμικό σύστημα αδύνατο θα πρέπει οι ευθείες που παριστάνει κάθε εξίσωση να είναι παράλληλες, άρα:

$$\text{π.χ.}\ \begin{cases} 2x-4y=12 \\ 2x-4y=8 \end{cases}$$

<u>1ος Τρόπος:</u> Εύκολα παρατηρούμε ότι η $\varepsilon_1: 2x-4y=12$ έχει $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}$ και η $\varepsilon_2: 2x-4y=8$ έχει $\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{2}$, άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, άρα το σύστημα αδύνατο.

<u>2ος Τρόπος:</u> Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή της αντικατάστασης:

$$\left.\begin{matrix} 2x-4y=12 \\ 2x-4y=8 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow 2x=4y+12 \quad (1) \\ \overset{(1)}{\Rightarrow} 4y+12-4y=8 \Rightarrow 12=8 \quad \text{αδύνατο} \end{matrix}$$

β) Για να παραστήσουμε γραφικά κάθε ευθεία θα χρειαστούμε 2 σημεία. Βρίσκουμε τα σημεία που κάθε μία από αυτές τέμνει τους άξονες.

Η ευθεία $2x-4y=12$ τέμνει τον $x'x$, όπου $y=0$,

$$2x-4\cdot 0=12 \text{ ή } 2x=12 \text{ ή } x=6$$

άρα, τέμνει τον $x'x$ στο $A(6,0)$.

Η ευθεία $2x-4y=12$ τέμνει τον yy' όπου $x=0$,

$$0\cdot x-4\cdot y=12 \text{ ή } -4y=12 \text{ ή } \quad y=-3$$

άρα, τέμνει τον yy' στο $B(0,-3)$.

Η ευθεία $2x-4y=8$ τέμνει τον $x'x$ όπου $y=0$,

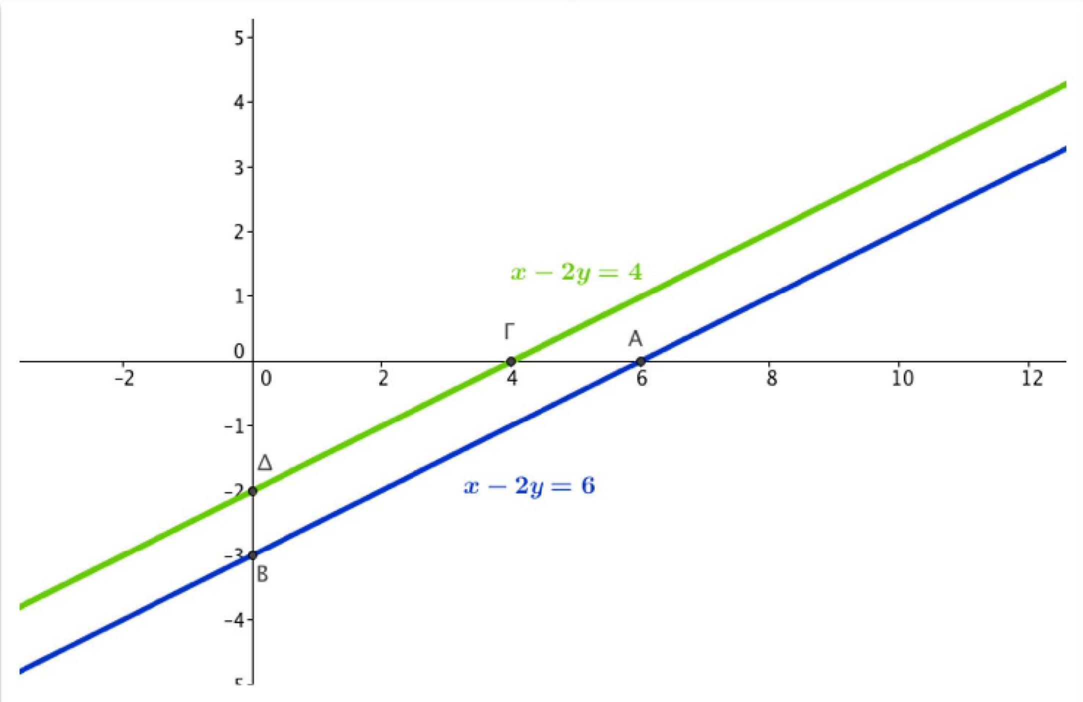
$$2x-4\cdot 0=8 \text{ ή } 2x=8 \text{ ή } x=4$$

Άρα, τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(4,0)$.

Η ευθεία $2x-4y=8$ τέμνει τον yy' όπου $x=0$,

$$2\cdot 0-4\cdot y=8 \text{ ή } -4y=8 \text{ ή } y=-2$$

άρα, τέμνει τον yy' στο $\Delta(0,-2)$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα δεν θα τέμνονται ποτέ. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (16954)

Δίνεται η εξίσωση: $8x+2y=7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

Μονάδες 10

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε μια εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1) θα πρέπει το σύστημα να είναι αδύνατο.

Μια τέτοια εξίσωση είναι η $8x+2y=16$.

1ος Τρόπος: Εύκολα παρατηρούμε ότι η $\varepsilon_1: 8x+2y=7$ έχει $\lambda\varepsilon_1=-4$ και η $\varepsilon_1: 8x+2y=16$ έχει $\lambda\varepsilon_2=-4$.

Άρα, $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, άρα το σύστημα αδύνατο, άρα δεν έχουν καμία κοινή λύση.

2ος Τρόπος: Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή της αντικατάστασης.

$$8x + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 7 - 8x \ (1)$$

$8x + 2y = 16 \overset{(1)}{\Rightarrow} 8x + 7 - 8x = 16 \Rightarrow 7 = 16$, αδύνατο, άρα δεν έχουν καμιά κοινή λύση.

β) Για να παραστήσουμε γραφικά κάθε ευθεία θα χρειαστούμε 2 σημεία.

Η ευθεία $8x + 2y = 7$ για $x = 1$ γίνεται,

$8 \cdot 1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $A\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

Επίσης,

$y = 5 \Rightarrow 8x + 2 \cdot 5 = 7 \Rightarrow 8x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $B\left(-\frac{3}{8}, 5\right)$.

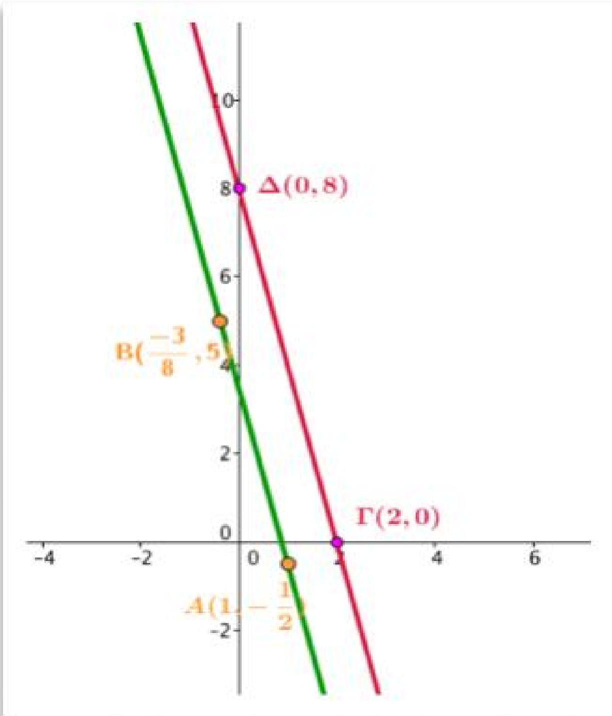
Όμοια για την ευθεία $8x + 2y = 16$,

$x = 2 \Rightarrow 8 \cdot 2 + 2y = 16 \Rightarrow y = 0$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2, 0)$.

$x = 0 \Rightarrow 8 \cdot 0 + 2y = 16 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $\Delta(0, 8)$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα δεν θα τέμνονται ποτέ. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)

Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16950)

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (16957)

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια.

Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη. Πρέπει

$$x + y = 27 \text{ και } x > y.$$

Δεν μπορούμε να βρούμε την ηλικία του καθενός με μοναδικό τρόπο,γιατί υπάρχουν πολλά ζεύγη τιμών που ικανοποιούν τις δοσμένες σχέσεις.

π.χ. $x = 14$ και $y = 13$ ή $x = 15$ και $y = 12$ ή $x = 16$ και $y = 11$ κ.τ.λ.

β) Εάν επιπλέον διαφέρουν κατά 5 χρόνια σημαίνει πως ο Μάρκος είναι 5 χρόνια μεγαλύτερος του Βασίλη, άρα: $x = 5 + y\ (1)$.

Άρα,

$$x + y = 27 \overset{(1)}{\Rightarrow} 5 + y + y = 27 \Rightarrow 2y = 22 \Rightarrow y = 11.$$

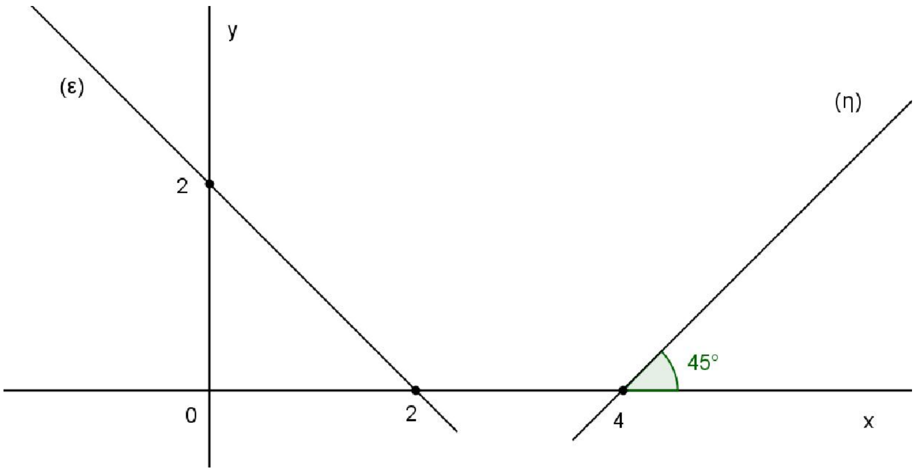
Άρα η σχέση (1) γίνεται,

$$x = 5 + 11 = 16.$$

Άρα, ο Μάρκος είναι 16 χρονών και ο Βασίλης είναι 11 χρονών.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (16960)

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



Μονάδες 12

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (ε) έχει την μορφή $y = \alpha \cdot x + \beta$.

Αφού διέρχεται από τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(0, 2)$ σημαίνει ότι αυτά τα σημεία θα την επαληθεύουν.

Άρα,

$$y = \alpha \cdot x + \beta \overset{B(0,2)}{\Rightarrow} 2 = 0 \cdot \alpha + \beta \Rightarrow 2 = \beta\ (1)$$

$$y = \alpha \cdot x + \beta \overset{A(2,0)}{\Rightarrow} 0 = 2\alpha + \beta \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = 2\alpha + 2 \Rightarrow 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1.$$

Άρα, $\varepsilon : y = -x + 2$.

Η εξίσωση (η) έχει την μορφή $y=\alpha\cdot x+\beta$.

Αφού διέρχεται από το $\Gamma(4,0)$ σημαίνει ότι αυτό το σημείο θα την επαληθεύει.

Άρα,

$$y=\alpha\cdot x+\beta \overset{\Gamma(4,0)}{\Rightarrow} 0=4\alpha+\beta \ (2).$$

Όμως, η (η) σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 45^{o}, άρα $\lambda_{\eta}=\varepsilon\varphi 45^{o}=1$, όμως $\lambda_{\eta}=\alpha$.

Άρα, $\alpha=1 \ (3)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

$$0=4\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=-4.$$

Άρα, $(\eta): y=x-4$.

β) Για να βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon): y=-x+2$ και $(\eta)=y=x-4$ λύνω το σύστημά τους:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+2=x-4 \Rightarrow 2+4=x+x \Rightarrow 6=2x \Rightarrow x=3$$

άρα $y=x-4 \Rightarrow y=3-4 \Rightarrow y=-1$

Άρα, οι $(\varepsilon),(\eta)$ τέμνονται στο $E(3,-1)$ στην προέκταση προφανώς του δοθέντος σχεδίου.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=8 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2,-3)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

Έχουμε,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=\beta+2\alpha, \quad D_x=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}=8\beta+2\gamma, \quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}=\gamma-8\alpha$$

α) Επειδή το ζεύγος $(2,-3)$ είναι λύση του συστήματος θα πρέπει

$$D\neq 0 \ \text{και} \ 2=\frac{D_x}{D}, \ -3=\frac{D_y}{D}$$

δηλαδή $\beta+2\alpha\neq 0$ και $2=\dfrac{8\beta+2\gamma}{\beta+2\alpha}, -3=\dfrac{\gamma-8\alpha}{\beta+2\alpha}$

άρα $\beta+2\alpha\neq 0$ και $2\alpha=3\beta+\gamma$

Επομένως αναζητούμε μία τιμή για τα α, β και γ που επαληθεύουν τις παραπάνω σχέσεις, έτσι πχ. για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ έχουμε $4 = 3 + \gamma$ δηλαδή $\gamma = 1$.

Τελικά για $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$ το σύστημα έχει μια μοναδική λύση την $(2,-3)$.

β) Για να είναι το σύστημα αδύνατο πρέπει:

$$D = 0 \text{ και } D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0$$

δηλαδή $\beta + 2\alpha = 0$ και $8\beta + 2\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq -4\beta$

Επομένως αναζητούμε μία τιμή για τα α, β και γ που επαληθεύουν τις παραπάνω σχέσεις, έτσι

πχ. για $\alpha = 2$ τότε $\beta + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \beta = -4$ άρα $\gamma \neq -4\beta \Rightarrow \gamma \neq -4\cdot(-4) \Rightarrow \gamma \neq 16$, οπότε

για $\alpha = 2$, $\beta = -4$ και $\gamma \neq 16$, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18637), ΑΣΚΗΣΗ Β15 (18638)

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (17651)

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω x το πλήθος των δίκυκλων οχημάτων, και y το πλήθος των τετράτροχων οχημάτων, όπου x και y θετικοί ακέραιοι.

Είναι

$$x + y = 830$$

αφού το σύνολο των οχημάτων στο δημοτικό parking είναι 830.

Επιπλέον, επειδή κάθε δίκυκλο διαθέτει δύο τροχούς και κάθε τετράτροχο έχει τέσσερις τροχούς και το σύνολο των τροχών είναι 2700, θα ισχύει

$$2x + 4y = 2700.$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ 2x + 4y = 2700 \end{cases}$$

β) θα λύσουμε το σύστημα του ερωτήματος (α) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} x + y = 830 \\ 2x + 4y = 2700 \end{cases} \begin{matrix} \\ \div 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 830 \\ x + 2y = 1350 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -830 \; (1) \\ x + 2y = 1350 \; (2) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις εξισώσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$y = 520$$

Αντικαθιστούμε στην (2) και παίρνουμε:

$$x + 2 \cdot 520 = 1350 \Leftrightarrow x = 1350 - 1040 \Leftrightarrow x = 310$$

Άρα, υπάρχουν 310 δίκυκλα και 520 τετράτροχα στο parking.

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (17683)

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda-1)y = -6 \end{cases}, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

Μονάδες 8

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 8

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = -3$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} (-3+1)x + 2y = 3 \\ 4x + (-3-1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 4x - 4y = -6 \end{cases}$$

Αλλάζουμε τα πρόσημα της $1^{ης}$ εξίσωσης και διαιρούμε και τα δύο μέλη της $2^{ης}$ εξίσωσης με το 2.

Έτσι, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ 2x - 2y = -3 \end{cases}$$

Δηλαδή το σύστημα έχει μία μόνο εξίσωση, την $2x - 2y = -3 \Leftrightarrow y = \dfrac{2x+3}{2}$.

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(k, \dfrac{2k+3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας $k = 0$ βρίσκουμε μία λύση του συστήματος, την $\left(0, \dfrac{2\cdot 0+3}{2}\right) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

β) Για $\lambda = 3$ το σύστημα γράφεται $\begin{cases} (3+1)x + 2y = 3 \\ 4x + (3-1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$, το οποίο είναι αδύνατο.

γ) Για $\lambda = 0$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} (0+1)x + 2y = 3 \\ 4x + (0-1)y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -6 \end{cases},$$

το οποίο έχει ορίζουσα

$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 4=-9\neq 0$, οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ -6 & -1\end{vmatrix}}{-9}=\frac{3\cdot(-1)-2\cdot(-6)}{-9}=\frac{9}{-9}=-1$$

και

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}}{-9}=\frac{1\cdot(-6)-3\cdot 4}{-9}=\frac{-18}{-9}=2.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(-1,2)$.

Παρόμοιες Ασκήσεις : -
Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (17703)

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις, $(\varepsilon_1): 2x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): (\lambda-1)x-y=6$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Μονάδες 8

β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2), για $\lambda=3$.

Μονάδες 8

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημα των εξισώσεων των δοσμένων ευθειών είναι,

$$\begin{cases} y=2x+1\\ y=(\lambda-1)x-6\end{cases}$$

είναι αδύνατο αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες, αν ισχύει

$$2=\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=3$$

Διαφορετική αντιμετώπιση του α) (με ύλη της Α' λυκείου)
Ισχύει ότι:

$\varepsilon_1//\varepsilon_2$ αν και μόνο αν έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης

Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=2x+1$ και $(\varepsilon_2): y=(\lambda-1)x-6$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\alpha_1=2$ και $\alpha_2=\lambda-1$ αντίστοιχα, άρα πρέπει

$$\alpha_1=\alpha_2\Leftrightarrow 2=\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=3$$

β) Για $\lambda=3$ η ευθεία (ε_2) παίρνει τη μορφή,

$$(\varepsilon_2): y = 2x - 6$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των (ε_1) ,(ε_2) με τους άξονες για να τις σχεδιάσουμε.

Για την $(\varepsilon_1): y = 2x + 1$ είναι,

αν $x = 0$ τότε $y = 1$, άρα το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $A(0,1)$

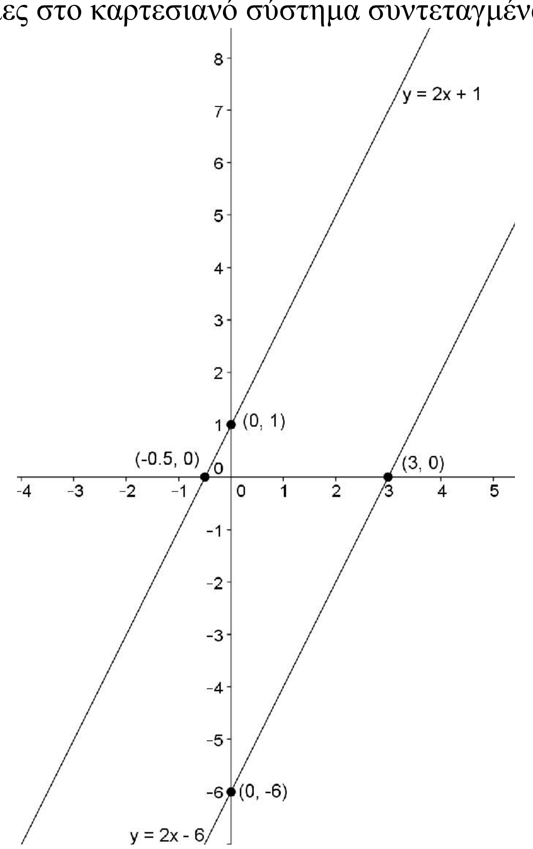
αν $y = 0$ τότε $0 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $B(-\frac{1}{2}, 0)$

Για την $(\varepsilon_2): y = 2x - 6$ ομοίως έχουμε,

αν $x = 0$ τότε $y = -6$, άρα το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $\Gamma(0, -6)$

αν $y = 0$ τότε $0 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $\Delta(3, 0)$

Επομένως οι ευθείες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από το παρακάτω σχήμα



γ) Αν οι ευθείες (ε_1) ,(ε_2) ταυτίζονται, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους,

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (\lambda - 1)x - 6 \end{cases}$$

θα είναι αόριστο άρα πρέπει όλοι οι αντίστοιχοι συντελεστές των εξισώσεων να ταυτίζονται, δηλαδή

$$2 = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ και } 1 = -6 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται.

Παρόμοιες Ασκήσεις : -

Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 6

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (17709)

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x+y=5$, $(\varepsilon_2): -2x+3y=-9$, $(\varepsilon_3): 3x+2y=7$

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_3)$

Μονάδες 12

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1)

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) i. Το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_2) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, δηλαδή η λύση του συστήματος,

$$\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ -2x+3y=-9 & (2) \end{cases}$$

με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε

$0+4y=-4 \Leftrightarrow y=-1$ και αντικαθιστώντας στην (1): $2x-1=5 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_2) είναι το $M(3,-1)$

ii. Όμοια το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_3) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, δηλαδή η λύση του συστήματος,

$$\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ 3x+2y=7 & (3) \end{cases}$$

πολλαπλασιάζουμε την (1) με -2 έχουμε, $-4x-2y=-10$ $(1)'$

προσθέτοντας τις (3) και $(1)'$ έχουμε,

$$-x+0=-3 \Leftrightarrow x=3$$

και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε, $2\cdot 3+y=5 \Leftrightarrow y=-1$

Άρα το σημείο τομής και των ευθειών (ε_1) ,(ε_3) είναι το ίδιο σημείο, $M(3,-1)$

β) Από το υποερώτημα (α) προκύπτει ότι το σημείο $M(3,-1)$ ανήκει ταυτόχρονα και στις τρεις ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3), άρα είναι το σημείο τομής και των τριών ευθειών.

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (17717)

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα.

Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

Μονάδες 12

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases}$$

β) Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ 14x+16(25-x)=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ 14x+400-16x=374 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ -2x=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=13 \end{cases},$$

άρα το πάνω διάζωμα έχει 12 σειρές και το κάτω έχει 13.

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (17734)

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x+y=6 \quad ,(\varepsilon_2): x-2y=-3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία $3x+\alpha y=\alpha+5$ διέρχεται από το Μ.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4-1=-5,\ D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-12+3=-9,\ D_y=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-6=-12$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-9}{-5},\frac{-12}{-5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right),$$

δηλαδή το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

β) Για να διέρχεται η ευθεία από το Μ, αρκεί να την επαληθεύει, δηλαδή

$$3\frac{9}{5}+\alpha\frac{12}{5}=\alpha+5 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 27+12\alpha=5\alpha+25 \Leftrightarrow 7\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{7}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (18637)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση του ζεύγος $(1,-4)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ζεύγος $(1,-4)$ είναι λύση του συστήματος, άρα θα επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος. Είναι,

$$x-2y=9 \underset{y=-4}{\overset{x=1}{\Rightarrow}} 1-2\cdot(-4)=9 \Rightarrow 9=9$$

άρα επαληθεύει την εξίσωση $x-2y=9$

Είναι:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \underset{y=-4}{\overset{x=1}{\Rightarrow}} \alpha\cdot 1+\beta\cdot(-4)=\gamma \Rightarrow \alpha-4\beta=\gamma$$

Για α = 2 και β = 1 προκύπτει:

$$\alpha-4\beta=\gamma \underset{\beta=1}{\overset{\alpha=2}{\Rightarrow}} 2-4=\gamma \Rightarrow \gamma=-2$$

Άρα,

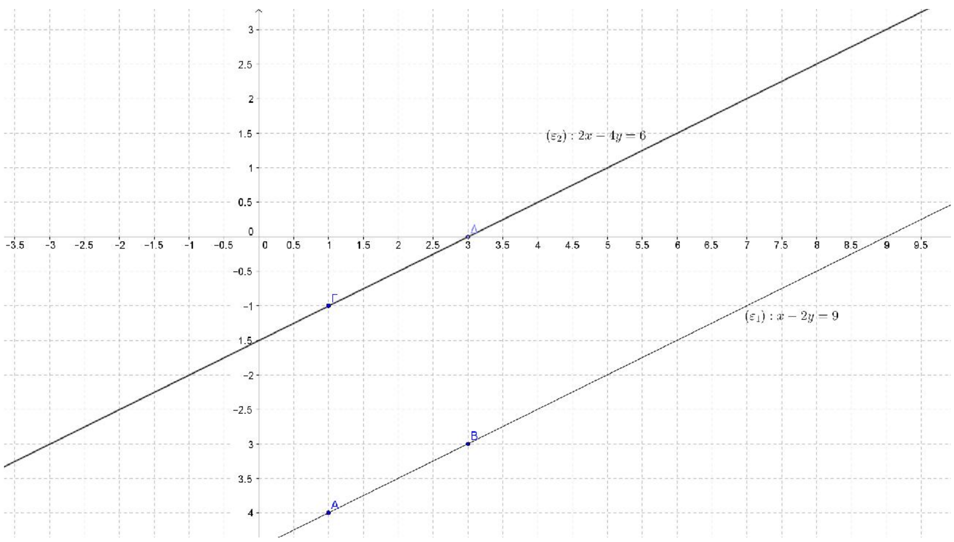
$$(\alpha, \beta, \gamma)=(2, 1, -2)$$

β) Για να είναι ένα σύστημα αδύνατο πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών να είναι ίσοι και οι σταθεροί όροι άνισοι, δηλαδή οι ευθείες θα πρέπει να είναι παράλληλες.

Άρα, για α = 2, β = –4 και γ = 6 προκύπτει σύστημα ΑΔΥΝΑΤΟ

Πράγματι, σχηματίζουμε τις ευθείες:

$(\varepsilon_1): x-2y=9$, $(\varepsilon_2): 2x-4y=6$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Παρόμοιες Ασκήσεις : -
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647), ΑΣΚΗΣΗ Β15 (18638)

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18638)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση του ζεύγος $(-1, 5)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ζεύγος $(-1, 5)$ είναι λύση του συστήματος, άρα θα επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος.

Είναι:

$$2x+y=3 \underset{y=5}{\overset{x=-1}{\Rightarrow}} 2\cdot(-1)+5=3 \Rightarrow 3=3$$

άρα επαληθεύει την εξίσωση $2x+y=3$

Είναι:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \underset{y=5}{\overset{x=-1}{\Rightarrow}} \alpha\cdot(-1)+\beta\cdot 5=\gamma \Rightarrow -\alpha+5\beta=\gamma$$

Για $\alpha=1$ και $\beta=1$ προκύπτει: $-\alpha+5\beta=\gamma \underset{\beta=1}{\overset{\alpha=1}{\Rightarrow}} -1+5=\gamma \Rightarrow \gamma=4$

Άρα: $(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 4)$

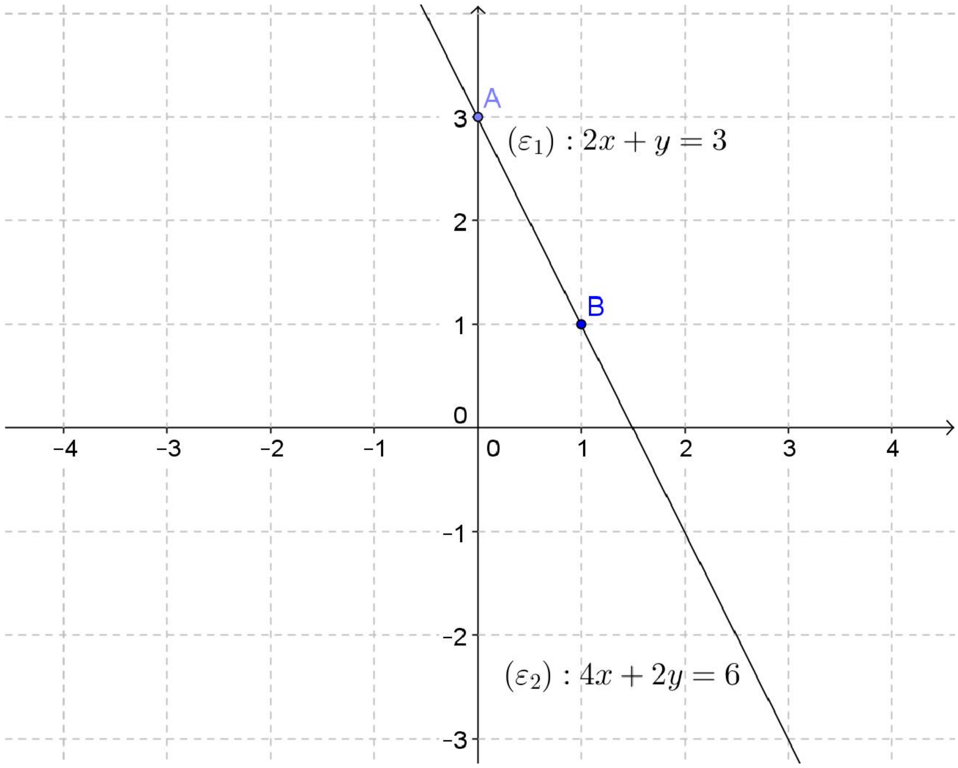
β) Για να έχει ένα σύστημα άπειρες λύσεις πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών να είναι ίσοι και οι σταθεροί όροι επίσης ίσοι, δηλαδή οι ευθείες θα πρέπει να ταυτίζονται.

Άρα, για $\alpha=4$, $\beta=2$ και $\gamma=6$ προκύπτει σύστημα με άπειρες λύσεις.

Πράγματι, σχηματίζουμε τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 2x+y=3,\ (\varepsilon_2): 4x+2y=6$$

σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647), ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18637)

ΑΣΚΗΣΗ Β15 (20329)

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, Dx ,Dy του συστήματος ισχύουν

$$D = \lambda(\lambda - 1), \ Dx = \lambda - 1 \text{ και } Dy = \lambda(\lambda - 1)$$

Μονάδες 15

β) Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - \lambda \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2 \cdot \lambda - (\lambda + 1) \cdot 1 = 2\lambda - \lambda - 1 = \lambda - 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda + 1) - 2\lambda = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

β) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε είναι $D \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = \left(\frac{Dx}{D}, \frac{Dy}{D}\right) = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)}, \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - 1)}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$$

Παρόμοιες ασκήσεις: Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας/8 σελ. 23

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17834)

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού.

Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$.

Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω,
x: η ηλικία του πατέρα,
y: η ηλικία της μητέρας,
z: η ηλικία του παιδιού.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$y = 3z$ (αφού η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού)
$\frac{x}{z} = \frac{11}{3}$ (αφού ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι $\frac{11}{3}$)
και $x + y + z = 115$ (αφού το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια).

Επομένως δημιουργείται το σύστημα των τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους,

$$\begin{cases} y = 3z \\ \frac{x}{z} = \frac{11}{3} \\ x + y + z = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z \\ 3x = 11z \\ x + y + z = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z \\ x = \frac{11z}{3} \\ x + y + z = 115 \end{cases}$$

β) Έχουμε,

$$\begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ x+y+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ \dfrac{11z}{3}+3z+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ 11z+9z+3z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ 23z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=45 \\ x=55 \\ z=15 \end{cases}$$

άρα η μητέρα είναι 45 ετών, ο πατέρας 55 ετών και το παιδί 15 ετών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17835)

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x+(\lambda+2)y=3$, $(\lambda-2)x+5y=3$ αντίστοιχα και $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

Μονάδες 13

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x+2y=3$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 θα βρεθεί με τη βοήθεια του πλήθους των λύσεων του συστήματος των εξισώσεών τους, που δίνει και το πλήθος των κοινών τους σημείων.

Το σύστημα αυτό είναι το: $(\Sigma)\ \begin{cases} x+(\lambda+2)y=3 \\ (\lambda-2)x+5y=3 \end{cases}$ και έχει ορίζουσα:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot5-(\lambda+2)\cdot(\lambda-2)=5-(\lambda^2-4)=5-\lambda^2+4=-\lambda^2+9$$
$$=-(\lambda+3)(\lambda-3)$$

Αν $D\neq0\Leftrightarrow-(\lambda+3)(\lambda-3)\neq0\Leftrightarrow\lambda+3\neq0$ και $\lambda-3\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-3$ και $\lambda\neq3$, τότε το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση, που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν ένα και μοναδικό σημείο τομής (με συντεταγμένες τις λύσεις του παραπάνω συστήματος), συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

Αν $\lambda=3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases}\Leftrightarrow x+5y=3,$$ που έχει άπειρες λύσεις.

Συνεπώς όταν $\lambda=3$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν άπειρα σημεία τομής, δηλαδή ταυτίζονται.

Αν $\lambda=-3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ -5x+5y=3 \end{cases} \Bigg| \cdot(-5) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y=-15 \\ -5x+5y=3 \end{cases},$$

άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλες.

Τελικά:

- Για $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$, οι ευθείες τέμνονται.
- Για $\lambda = 3$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται .
- Για $\lambda = -3$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Στο ερώτημα (α) είδαμε ότι οι ευθείες τέμνονται όταν $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$.

Τότε το σύστημα (Σ) έχει ορίζουσες ως προς x και y

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & \lambda+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 3\cdot(\lambda+2) = 15-3\lambda-6 = -3\lambda+9 = -3(\lambda-3)$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda-2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot(\lambda-2) = 3-3\lambda+6 = -3\lambda+9 = -3(\lambda-3),$$

συνεπώς η μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος, για το εκάστοτε $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \pm 3$, προσδιορίζεται από τους τύπους:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-3(\lambda-3)}{-3(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{1}{\lambda+3}, \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{-3(\lambda-3)}{-3(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{1}{\lambda+3},$$

άρα το σημείο τομής Α των δύο ευθειών έχει συντεταγμένες:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}\right), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \pm 3.$$

γ) Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία $x+2y=3$, όταν ισχύει $x_0+2y_0=3$ άρα

$$\frac{1}{\lambda+3} + 2\cdot\frac{1}{\lambda+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\lambda+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda+3} = 1 \Leftrightarrow \lambda+3=1 \Leftrightarrow \lambda=-2,$$

λύση που είναι δεκτή αφού το $-2 \neq \pm 3$.

Άρα το Α ανήκει στην ευθεία $x+2y=3$ όταν $\lambda=-2$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 7

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (17839)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\alpha-1)x+3y=3 \\ x+(\alpha+1)y=3 \end{cases}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0), τότε $x_0 = y_0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

Μονάδες 6

ii. Δεν έχει λύση.

Μονάδες 4

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha = 3$, $\alpha = 2$, $\alpha = -2$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημά μας έχει ορίζουσες:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 3 \\ 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha+1) - 3\cdot 1 = \alpha^2 - 1 - 3 = \alpha^2 - 4 = (\alpha-2)(\alpha+2)\ ,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 3(\alpha+1) - 3\cdot 3 = 3\alpha + 3 - 9 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha-2) \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(\alpha-1) - 3\cdot 1 = 3\alpha - 3 - 3 = 3\alpha - 6 = 3(\alpha-2).$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) όταν

$D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 \neq 0$ και $\alpha + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$ και $\alpha \neq -2$.

Η μοναδική αυτή λύση βρίσκεται από τους τύπους:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)} = \frac{3}{\alpha+2} \text{ και } y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)} = \frac{3}{\alpha+2}$$

δηλαδή για τη λύση (x_0, y_0) ισχύει ότι $x_0 = y_0 = \dfrac{3}{\alpha+2}$.

β) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο όταν

$$D = 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+2) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \text{ ή } \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2.$$

i. Για $\alpha = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 3, \text{ οπότε έχει άπειρες λύσεις.}$$

Η σχέση $x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 3y$ συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(3-3k, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

ii. Για $\alpha = -2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \left| :(-3) \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}, \text{ δηλαδή είναι αδύνατο.}$$

γ) Για $\alpha = 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής, δηλαδή τέμνονται.

Για $\alpha = 2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος έχουν άπειρα κοινά σημεία, δηλαδή ταυτίζονται.

Για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι αδύνατο, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, συνεπώς είναι παράλληλες.

♦Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (20336)

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x-4y=1-\lambda \\ x+6y=\lambda+2 \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ.

Μονάδες 8

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, για την οποία οι ευθείες: $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12+4=16\neq 0$$

άρα το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Είναι,

$$D_x=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ \lambda+2 & 6 \end{vmatrix}=6(1-\lambda)+4(\lambda+2)=6-6\lambda+4\lambda+8=-2\lambda+14$$

και

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=2(\lambda+2)-(1-\lambda)=2\lambda+4-1+\lambda=3\lambda+3$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι,

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2\lambda+14}{16}=\frac{-\lambda+7}{8} \quad \text{και} \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3\lambda+3}{16}$$

γ) Οι ευθείες $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ τέμνονται στο σημείο

$$A\left(\frac{-\lambda+7}{8},\frac{3\lambda+3}{16}\right) \text{ (από β ερώτημα).}$$

Για να διέρχεται και η ευθεία $16x + 16y = 19$ από το Α πρέπει να επαληθεύουν οι συντεταγμένες της, δηλαδή,

$$16\cdot\frac{-\lambda+7}{8}+16\cdot\frac{3\lambda+3}{16}=19\Rightarrow 2(-\lambda+7)+3\lambda+3=19\Rightarrow \lambda=19-14-3\Rightarrow \lambda=2$$

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17650)
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:
Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων *x, y* του ορθογωνίου.
Μονάδες 15

ΛΥΣΗ
α) Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι $x \cdot y$ και η περίμετρός του $2x+2y=38$. Αν αυξήσουμε το μήκος του αρχικού ορθογωνίου κατά 2 cm, αυτό θα γίνει x + 2, ενώ αν μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, αυτό θα γίνει $y-4$.
Συνεπώς, το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι $(x+2)\cdot(y-4)$, είναι ίσο με το εμβαδόν του αρχικού, οπότε,

$$(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y\\ 2x+2y=38\end{cases}$$

β) Για να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, θα λύσουμε το σύστημα του ερωτήματος (α) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases}(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y\\ 2x+2y=38 \quad \Big| \div 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy-4x+2y-8=xy\\ x+y=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x+2y=8 \quad \Big| \div 2\\ x+y=19 \quad \Big| \cdot(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y=4 \ (1)\\ -x-y=-19 \ (2)\end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$-3x=-15 \Leftrightarrow x=5$$

Αντικαθιστούμε στην (2) και έχουμε

$$-5-y=-19 \Leftrightarrow y=19-5 \Leftrightarrow y=14$$

Άρα, x = 5 cm και y = 14 cm οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17659)

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Μονάδες 15

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α)

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ γράφεται ισοδύναμα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \ (1) \\ x = y - 1 \ (2) \end{cases}$.

Αντικαθιστούμε το x της σχέσης (2) στη σχέση (1) και παίρνουμε:

$$y = (y-1)^2 + 1 \Rightarrow y = (y^2 - 2y + 1) + 1 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $y^2 - 3y + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

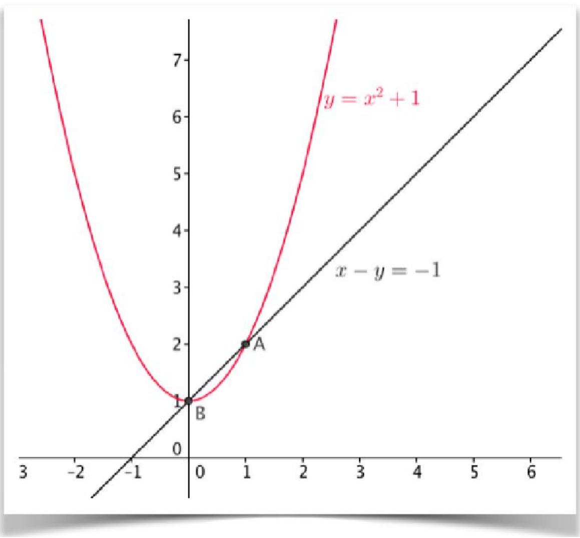
οπότε,

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow y = 2 \ \text{ή} \ y = 1.$$

Για $y = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 1$, ενώ για $y = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 0$.

Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις, τις $(0,1)$ και $(1,2)$.

β) Η πρώτη εξίσωση $y = x^2 + 1$ του συστήματος παριστάνει μια παραβολή, ενώ η δεύτερη εξίσωση $x - y = -1$ παριστάνει μια ευθεία. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων Α, Β της παραβολής και της ευθείας θα μας δώσουν τις δύο λύσεις του συστήματος (βλ. παρακάτω σχήμα)



Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17850)

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά.
Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι.
Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.
1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω x: ηλικία αγοριού και y: ηλικία κοριτσιού με $x > 0,\ y > 0$

Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$

β) Λύνουμε το σύστημα και έχουμε:

$$\begin{cases} x = 14 - 2y \\ (14 - 2y) \cdot y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 2y \\ -2y^2 + 14y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 2y \\ -y^2 + 7y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 2y \\ y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 14 - 2y \\ (y-3) \cdot (y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 2y \\ y = 3 \text{ ή } y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 - 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = 14 - 8 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Από όπου έχουμε: $(x, y) = (8, 3)$ δεκτή ή $(x, y) = (6, 4)$ απορρίπτεται αφού $2y > x$

Επομένως το αγόρι είναι 8 ετών και τα κορίτσια 3 ετών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (20337)

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x>0$ το μήκος και $y>2$ το πλάτος του ορθογωνίου. Τότε η περίμετρος του θα είναι $\Pi = x+y+x+y = 2x+2y$

Επομένως είναι

$$\Pi = 24 \Leftrightarrow 2x+2y=24 \Leftrightarrow x+y=12$$

Αν αυξήσουμε το μήκος κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος κατά 2cm τότε το νέο μήκος θα είναι $x+3$ ενώ το νέο πλάτος $y-2$. Το εμβαδόν E_1 του νέου ορθογωνίου που θα προκύψει θα είναι διπλάσιο του εμβαδού E του αρχικού

δηλαδή,

$$E_1 = 2E \Leftrightarrow (x+3)\cdot(y-2) = 2x\cdot y \Leftrightarrow x\cdot y - 2x + 3y - 6 = 2x\cdot y \Leftrightarrow x\cdot y + 2x - 3y + 6 = 0$$

Συνεπώς το σύστημα που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση είναι

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases} \text{ με } 0<x<10 \text{ και } y>2$$

β) Για να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου x,y θα πρέπει να λύσουμε το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα αυτό με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Επομένως έχουμε,

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ (12-y)\cdot y+2(12-y)-3y+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ 12y-y^2+24-2y-3y+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ -y^2+7y+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ -y^2+7y+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \text{ ή } x=2 \\ y=-3 \text{ ή } y=10 \end{cases}.$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(15,-3)$ και $(2,10)$

Επειδή όμως τα x, y είναι θετικοί αριθμοί οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου είναι $x=2$ και $y=10$ και του νέου ορθογωνίου

$$x=1+3=4 \text{ και } y=10-2=8$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Συνήθως μήκος x ενός ορθογωνίου λέμε τη μεγαλύτερη πλευρά ενώ πλάτος y τη μικρότερη πλευρά. Στην άσκηση δίνεται $x<y$
- Είναι $y>2$ διότι αν ήταν $y<2$ όταν θα ελαττώσουμε το πλάτος κατά 2 θα πάρουμε αρνητικό αριθμό. Επίσης αφού είναι $y>2$ τότε από τη σχέση

$$x+y=12 \Leftrightarrow x=12-y \text{ θα είναι και } x<12$$

♦ <u>Παρόμοιες Ασκήσεις</u>: Σχολικό βιβλίο: § 1.2 Παράδειγμα 1

Συνοπτική αντιστοίχιση ασκήσεων:

Ασκήσεις που αντιστοιχούν στην παράγραφο 1.1 του σχολικού βιβλίου:

Β1 (16950)
Β2 (16954)
Β3 (16957)
Β4 (16960)
Β5 (17647)
Β7 (17651)
Β8 (17683)
Β9 (17703)
Β10 (17709)
Β11 (17717)
Β12 (17734)
Β13 (18637)
Β14 (18638)
Β15 (20329)
Δ1 (17834)
Δ2 (17835)
Δ3 (17839)
Δ4 (20336)

Ασκήσεις που αντιστοιχούν στην παράγραφο 1.2 του σχολικού βιβλίου:

Β1 (17650)
Β2 (17659)
Δ1 (17850)
Δ2 (20337)

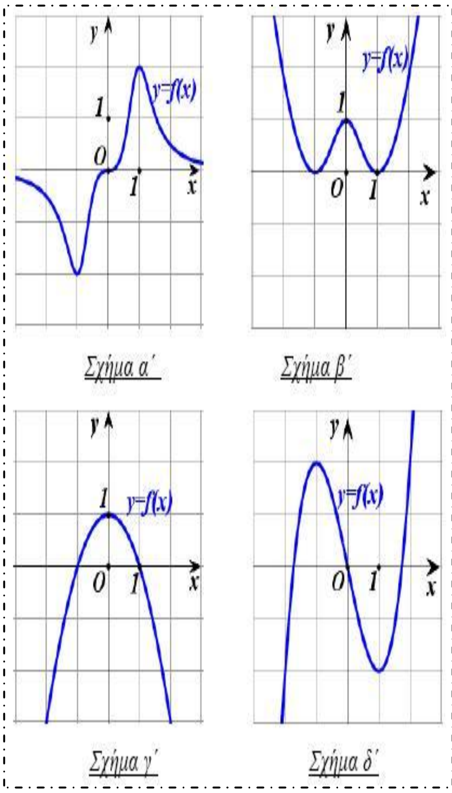
Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

§ 2.1 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ **με** $\mathbf{x_1 < x_2}$ **ισχύει:** $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$.

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ **με** $\mathbf{x_1 < x_2}$ **ισχύει:** $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.

- Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνήσια μονότονη** στο Δ.

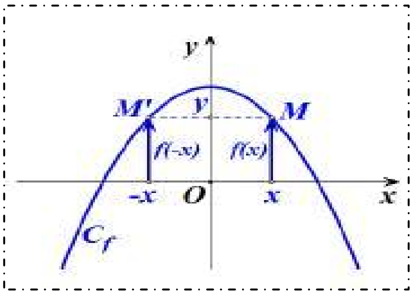


- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:
  $\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$**, για κάθε** $\mathbf{x \in A}$

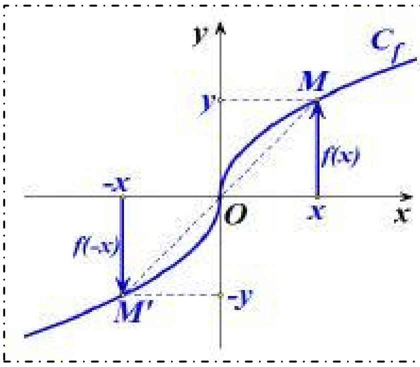
- Το $x_0 \in$Α λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min** $\boldsymbol{f}$**(x).**

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ (ολικό) **μέγιστο** όταν:
  $\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$**, για κάθε** $\mathbf{x \in A}$

- Το $\mathbf{x_0 \in A}$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με **max** $\boldsymbol{f}$**(x)** .
- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.
- Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α΄) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β') ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ') ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ').



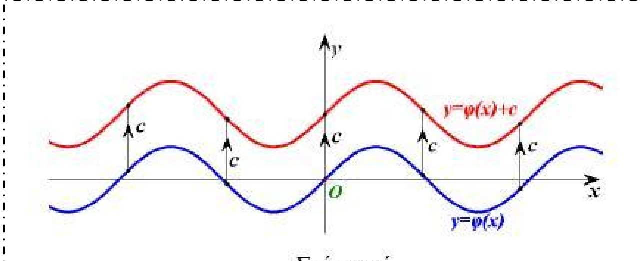
- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν για κάθε **x∈Α ισχύει: -x∈Α και** $\boldsymbol{f}$**(-x) =** $\boldsymbol{f}$**(x)**
- Γενικά:
  - Το πεδίο ορισμού μιας άρτιας συνάρτησης είναι **«συμμετρικό»** ως προς το 0
  - Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y 'y



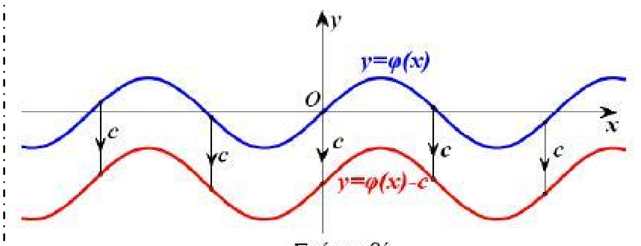
- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε x∈Α ισχύει: -x∈Α και f(-x) = - f(x)
- Γενικά:
  - Το πεδίο ορισμού μιας **περιττής** συνάρτησης είναι **«συμμετρικό»** ως προς το 0
  - Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων

§ 2.2 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = φ(x) + c$, **όπου** $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω**



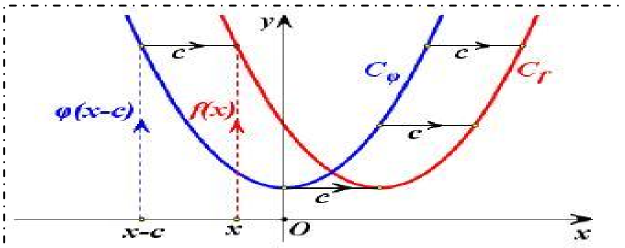
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

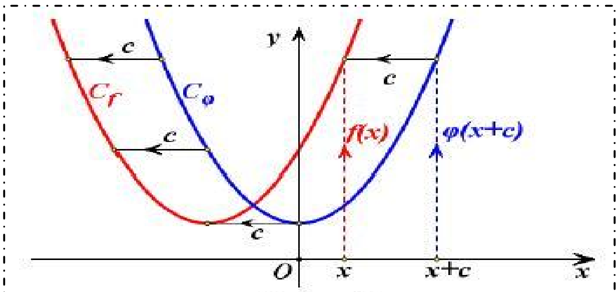
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = φ(x) - c$, **όπου** $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω**

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = φ(x - c)$, **όπου** $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά.**



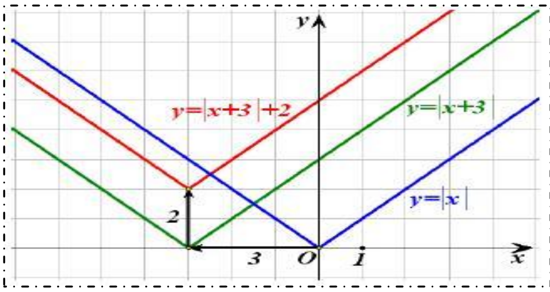
Σχήμα γ΄

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x) = φ(x + c)$, **όπου** $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**



Σχήμα δ΄

- Για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = φ(x \pm c) \pm d$, **με** $c, d > 0$ αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.



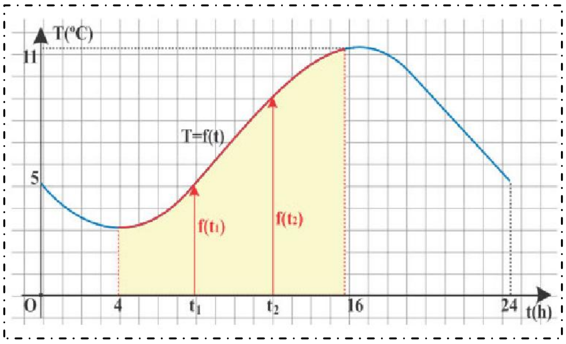
ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

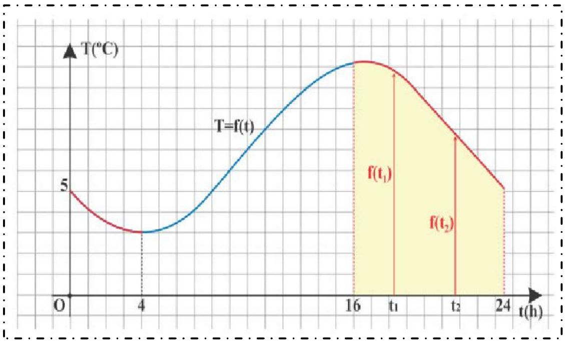
1. Έχουμε,

- Όταν μας λένε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διέρχεται από ένα σημείο (α, β) τότε ισχύει η σχέση f(α)=β
- Αν δοθεί ότι μία συνάρτηση είναι μονότονη και επιπλέον δοθούν δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η γραφική της παράσταση , τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω τον ορισμό της μονοτονίας και να προσδιορίσω το είδος της μονοτονίας π.χ. f μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα (2,5) και (3,1) τότε f(2)=5 και f(3)=1 άρα αφού 2<3 και 5>1 άρα f(2) >f(3) τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Επίλυση ανισώσεων με την βοήθεια της μονοτονίας συνάρτησης Αν μας ζητηθεί να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής: f(παράστασης) < A γράφω το A ως συνάρτηση της f, δηλαδή f(κ)=A και τότε έχω: f(παράστασης) < f(κ) άρα αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα έχω: παράσταση < κ ενώ αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα έχω: παράσταση > κ

2. Εφαρμογή μετατοπίσεων στις συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = \varphi(x \pm c) \pm d$, με $c, d > 0$, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

3. Μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα όταν η γραφική της παράσταση «ανεβαίνει» καθώς «κινείται από αριστερά προς τα δεξιά» και γνησίως φθίνουσα όταν «κατεβαίνει» καθώς «κινείται από αριστερά προς τα δεξιά»





4. Έχουμε,

- Τομές μιας γραφικής παράστασης με άξονες:
  A) Τομή με τον άξονα των x΄x : Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα των x΄x όταν $f(\alpha)=0$ τότε σημείο τομής το (α,0)
  Για να βρω τις τομές με τον άξονα των x΄x λύνω την εξίσωση $f(x)=0$
  B) Τομή με τον άξονα των y΄y : Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα των y΄y όταν $f(0)=\beta$ τότε σημείο τομής το (0,β)
  Για να βρω τις τομές με τον άξονα των y΄y βρίσκω την $f(0)= y$
- Αν δοθεί ότι μία συνάρτηση είναι μονότονη και επιπλέον δοθούν δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η γραφική της παράσταση, τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω τον ορισμό της μονοτονίας και να προσδιορίσω την διάταξη των σημείων π.χ. f μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα (2, f(2)) και (3, f(3)) τότε αφού 2<3 και f γνησίως αύξουσα τότε f(2) <f(3) και αν η f είναι γνησίως φθίνουσα f(2) >f(3).

- Για βρω το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης η οποία περιέχει ρίζες παίρνω περιορισμούς , δηλαδή συγκεκριμένα παίρνω όλες τις υπόριζες ποσότητες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και κάνω αν χρειαστεί όλες τις απαραίτητες συναληθεύσεις.

- Ορισμός ελάχιστου: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥΣ

Ασκήσεις που αντιστοιχούν στην παράγραφο 2.1 του σχολικού βιβλίου:

Β1 (16962)
Β2 (17688)
Β3 (17698)
Β4 (17732)

Ασκήσεις που αντιστοιχούν στην παράγραφο 2.2 του σχολικού βιβλίου:

Β1 (16965)
Β3 (18634)
Β5 (20328)

Επαναληπτικές ασκήσεις (παράγραφοι 2.1 , 2.2 του σχολικού βιβλίου)

Β2 (18632)
Β4 (19914)
Δ1 (17833)
Δ2 (17842)
Δ3 (20332)

2.1: Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16962)

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία Α(5,2) και Β(4,9).

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x)<2$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $A(5,2)$ και $B(4,9)$, έχουμε

$$f(5)=2 \text{ και } f(4)=9.$$

α) Παρατηρούμε ότι $5>4$ και πως $f(5)<f(4)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

β) Θα λύσουμε την ανίσωση: $f(5-3x)<2$. Παρατηρούμε ότι $f(5)=2$.

Έχουμε,

$$f(5-3x)<2 \Leftrightarrow f(5-3x)<f(5) \overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow} 5-3x>5 \Leftrightarrow -3x>0 \Leftrightarrow x<0$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17688)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 1$.

Μονάδες 8

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x)\le 1$ ή ισοδύναμα ότι

$$\frac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Τα παραπάνω βήματα είναι ισοδύναμα, άρα ισχύει και η ζητούμενη σχέση.

β) Παρατηρούμε ότι το $f(1)=\dfrac{2\cdot 1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα η σχέση $f(x)\le 1$ γράφεται $f(x)\le f(1)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το 1 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (διότι το τριώνυμο x^2+1 έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα $x^2+1>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x).

Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου για το γ) : 4, 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 38-39

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17698)
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$

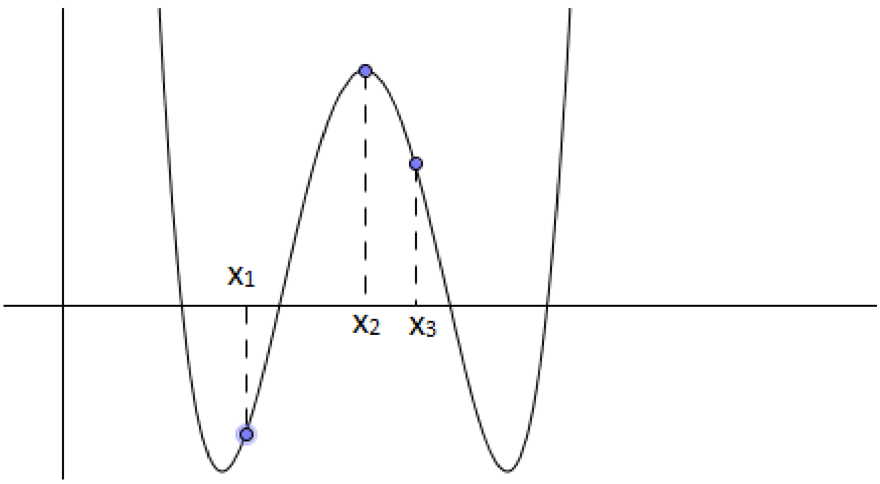
Μονάδες 10

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 10

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα με τη C_f που δίνεται, έχουμε,

$$f(x_1) < 0 < f(x_3) < f(x_2)$$

β) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ αφού υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ και είναι

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

δηλαδή δεν ισχύει ο ορισμός ούτε της γνησίως αύξουσας, ούτε της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

Διαφορετική αντιμετώπιση του β)
Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, από το σχήμα έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ ,$$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Όμως

$$x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_2) > f(x_3) \ \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

γ) Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο x_2, αφού από τη C_f που δίνεται, βλέπουμε ότι καθώς το x παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές από το x_3, οι τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα και πάνω από το $f(x_3)$.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17732)
Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f

Μονάδες 13

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2, να δείξετε ότι $f(0)>0$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού η f είναι γνησίως μονότονη και $3 = f(2) < f(4) = 5$, δηλ. για

$$2 < 4 \Rightarrow f(2) < f(4),$$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο (-2,0), δηλ. $f(-2) = 0$.
Επομένως, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει

$$-2<0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-2)<f(0) \Leftrightarrow 0<f(0) \text{ ή } f(0)>0.$$

2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16965)

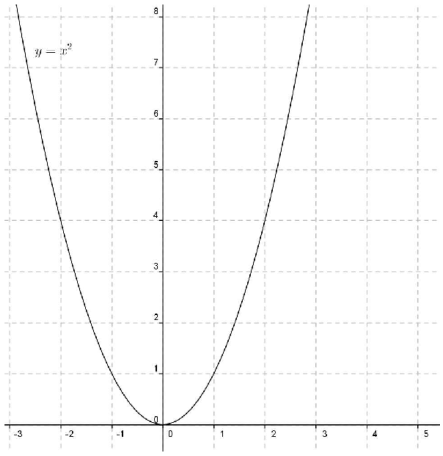
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$

Μονάδες 12

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y=x^2$

Μονάδες 13

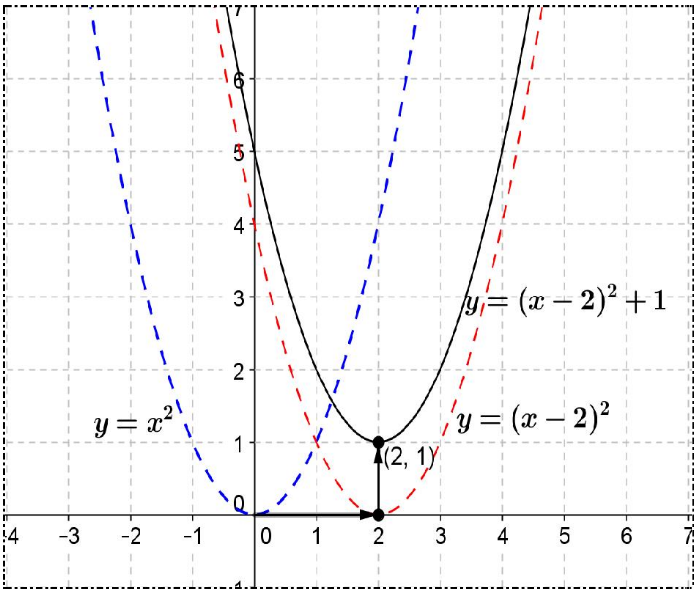


ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=x^2-2\cdot 2x+2^2+1=(x-2)^2+1.$$

β) Παρατηρούμε ότι η $f(x)=(x-2)^2+1$ σε σχέση με την $y=x^2$ προκύπτει ως εξής: Αρχικά με οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και στην συνέχεια με κατακόρυφη μετατόπιση της $y=(x-2)^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομαδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18632)

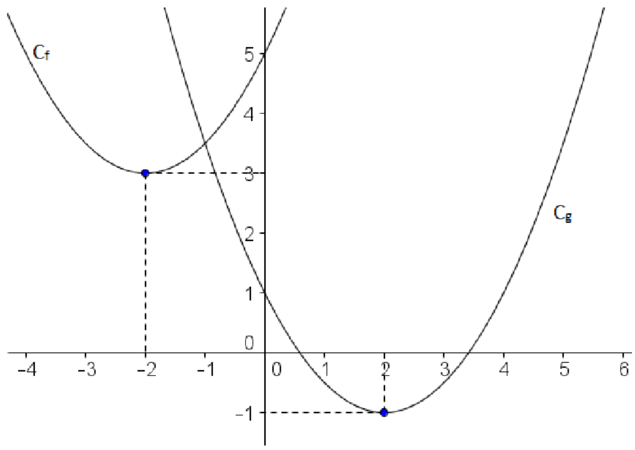
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το ℝ. Η γραφική παράσταση της προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.
Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g.

Μονάδες 15



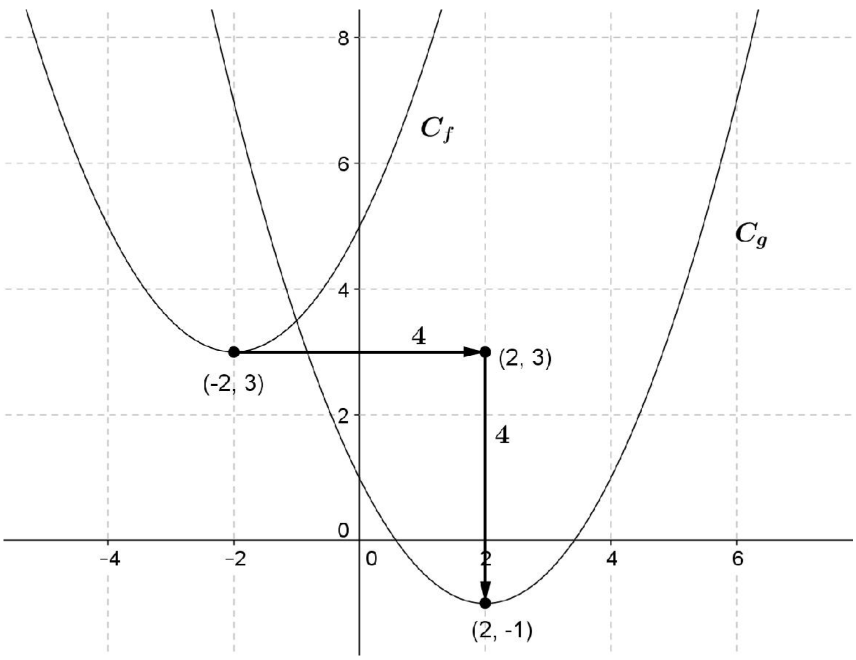
ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση εμφανίζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=-2$, το $f(-2)=3$

β) Για να σχηματίσουμε τη γραφική παράσταση της g πρέπει να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση της f κατά 4 θέσεις προς τα δεξιά (από το – 2 να πάει στο 2) και κατά 4 θέσεις κάτω (από το 3 να πάει στο – 1)



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 6/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (18634)

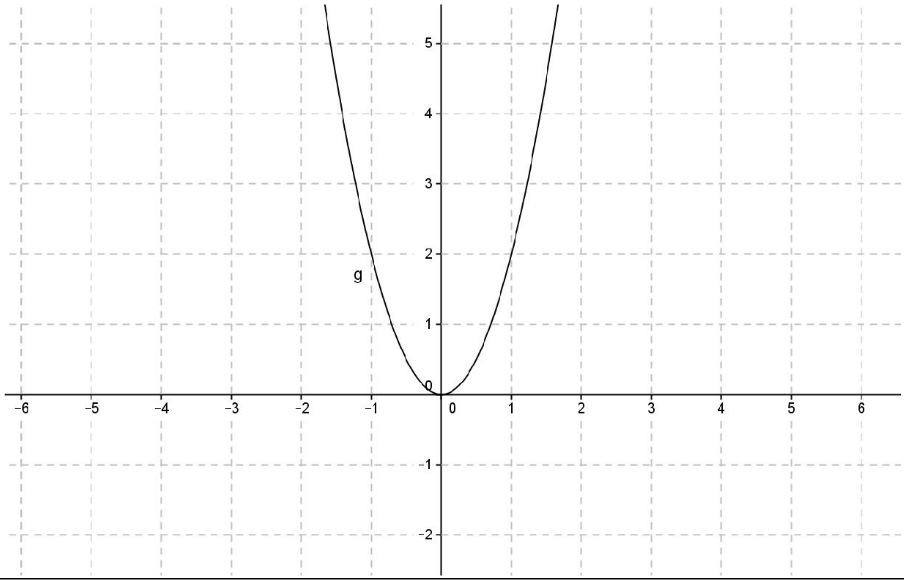
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$

Μονάδες 10

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 15



ΛΥΣΗ

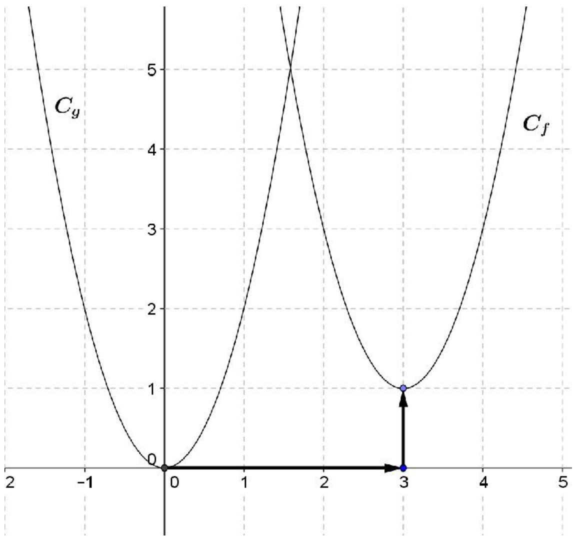
α) Έχουμε,

$$2(x-3)^2+1=2(x^2-6x+9)+1=2x^2-12x+18+1=2x^2-12x+19=f(x)$$

ή

$$f(x)=2x^2-12x+19=2x^2-12x+18+1=2(x^2-6x+9)+1=2(x-3)^2+1$$

β) Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f αρκεί να μετατοπίσουμε κατά 3 μονάδες δεξιά και κατά 1 μονάδα πάνω τη γραφική παράσταση της f.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19914)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5$, $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

Μονάδες 8

β) Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Με ποια μετατόπιση της $g(x)=x^2$ προκύπτει η C_f;

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Όπως σημειώθηκε στη μεθοδολογία, για να παρουσιάζει ελάχιστο η f(x) στο $x=0$, πρέπει να ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq -5\Leftrightarrow x^2-5\geq -5\Leftrightarrow x^2\geq 0,$$

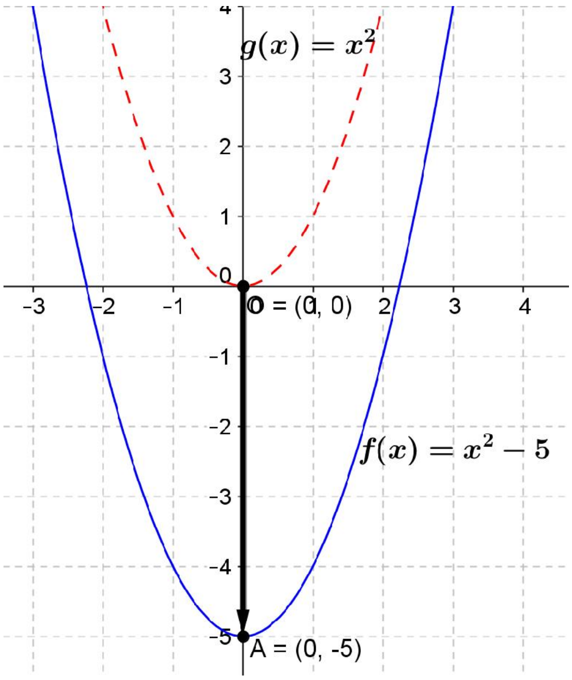
σχέση που ισχύει για κάθε $x\in R$.

β) Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια, πρέπει για κάθε $x\in R$ να ισχύει $-x\in R$ και

$$f(-x)=(-x)^2-5=x^2-5=f(x).$$

Άρα η f(x) είναι άρτια.

γ) Η C_f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την $g(x)=x^2$ στον άξονα y΄y (κατακόρυφα) κατά 5 μονάδες προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4, 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 38, 39 και 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 46.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (20328)

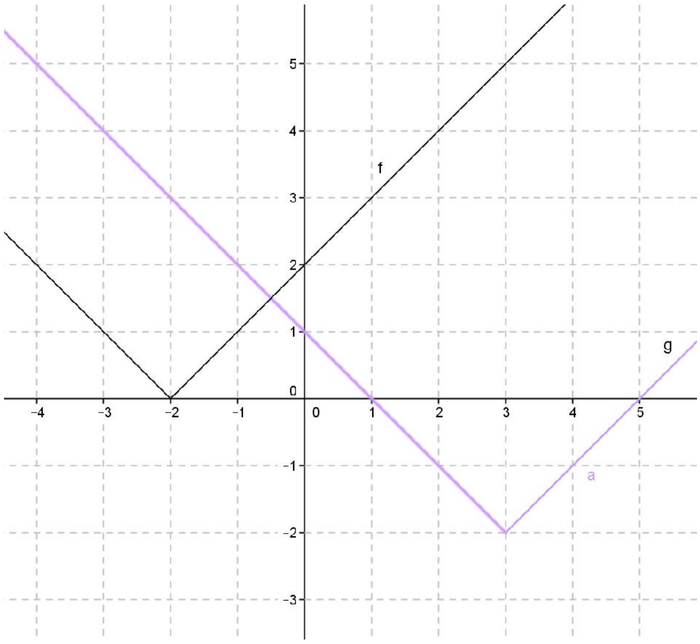
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις, να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f, τη θέση και την τιμή του.

Μονάδες 12

β) Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g. Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g, αν f(x)=|x+2|

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ,που είναι και ολικό, στο -2 ,το $f(-2)=0$.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από:

- 1[ον] μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά δύο μονάδες προς τα κάτω,
- 2[ον] από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά πέντε μονάδες προς τα δεξιά.

Συνεπώς, ο τύπος της g είναι:

$$g(x)=f(x-5)-2,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν επιπλέον είναι $f(x)=|x+2|$, $x\in\mathbb{R}$,τότε:

$$g(x)=|(x-5)+2|-2 \Leftrightarrow g(x)=|x-3|-2,\ x\in\mathbb{R}$$

♦ Παρόμοιες ασκήσεις: Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας/1 σελ. 38 και 6 σελ. 46

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17833)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$

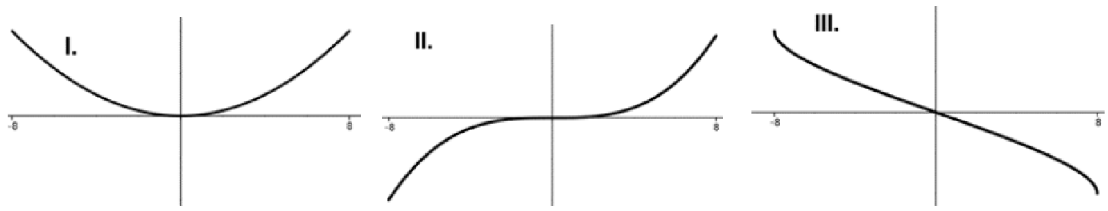
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 8

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



Μονάδες 7

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-3$ και $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές .

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$\begin{cases}8-x\geq 0\\ \text{και}\\ 8+x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 8\\ \text{και}\\ -8\leq x\end{cases}\Leftrightarrow -8\leq x\leq 8$$

άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=[-8,8]$

β) Έχουμε για κάθε $x\in A$, ότι $-x\in A$ (αφού το διάστημα είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν),

$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8+(-x)}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-\left(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}\right)=-f(x)$

άρα η f είναι περιττή.

γ) Η μοναδική γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι η τρίτη γραφική παράσταση από αυτές που προτείνονται (δείτε σημείωση 1). Οπότε τα σημεία στα οποία έχουμε μέγιστα - ελάχιστα είναι:

- Ελάχιστο στο σημείο: $(8,f(8))=(8,-4)$,άρα min f(x) = f(8) = – 4
- Μέγιστο στο σημείο: $(-8,f(-8))=(-8,-f(8))=(-8,4)$, άρα max f(x) = f(–8) = 4

δ) Έστω ότι η $g(x)=f(x)-3$ είναι περιττή στο διάστημα Α, τότε

$$g(-x)=-g(x)\Rightarrow f(-x)-3=-(f(x)-3)\Rightarrow -f(x)-3=-f(x)+3\Rightarrow -3=3$$

που είναι **άτοπο**, άρα η g δεν είναι περιττή.

Έστω ότι η $g(x) = f(x) - 3$ είναι άρτια στο διάστημα Α, τότε

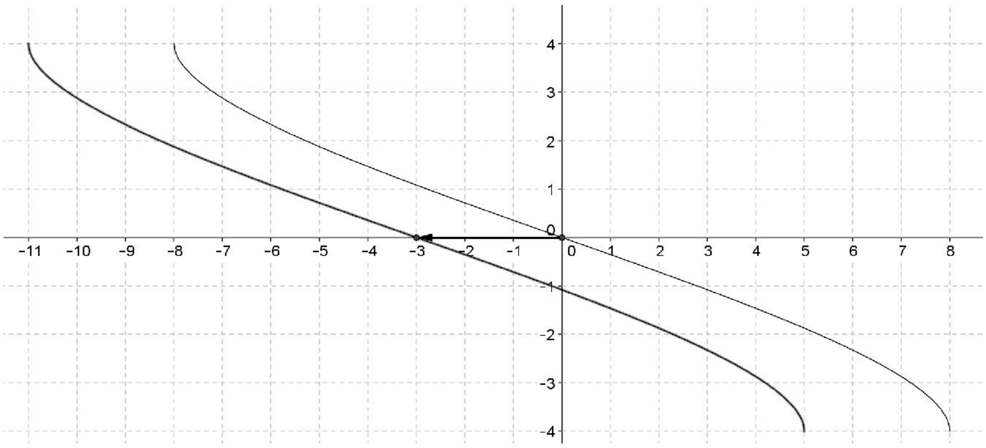
$$g(-x) = g(x) \Rightarrow f(-x) - 3 = f(x) - 3 \Rightarrow -f(x) = f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

που είναι **άτοπο**, άρα η g δεν είναι ούτε άρτια.

(Δείτε εναλλακτικά την σημείωση 2).

Η $h(x) = f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, αφού προκύπτει από την γραφική παράσταση της C_f αν την μετατοπίσουμε κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα. Επομένως ούτε συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y (όχι άρτια), ούτε ως προς την αρχή των αξόνων (όχι περιττή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h.

(Δείτε εναλλακτικά την σημείωση 3 και 4)



Σημείωση 1: *Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της! Πως;*
Δείτε την παρακάτω απόδειξη κυρίως για εκπαιδευτικούς λόγους:
Έστω $x_1, x_2 \in A$*, με* $x_1 < x_2$*, τότε*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 8 - x_1 > 8 - x_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{8 - x_1} > \sqrt{8 - x_2} \quad (1)$$

Επίσης,

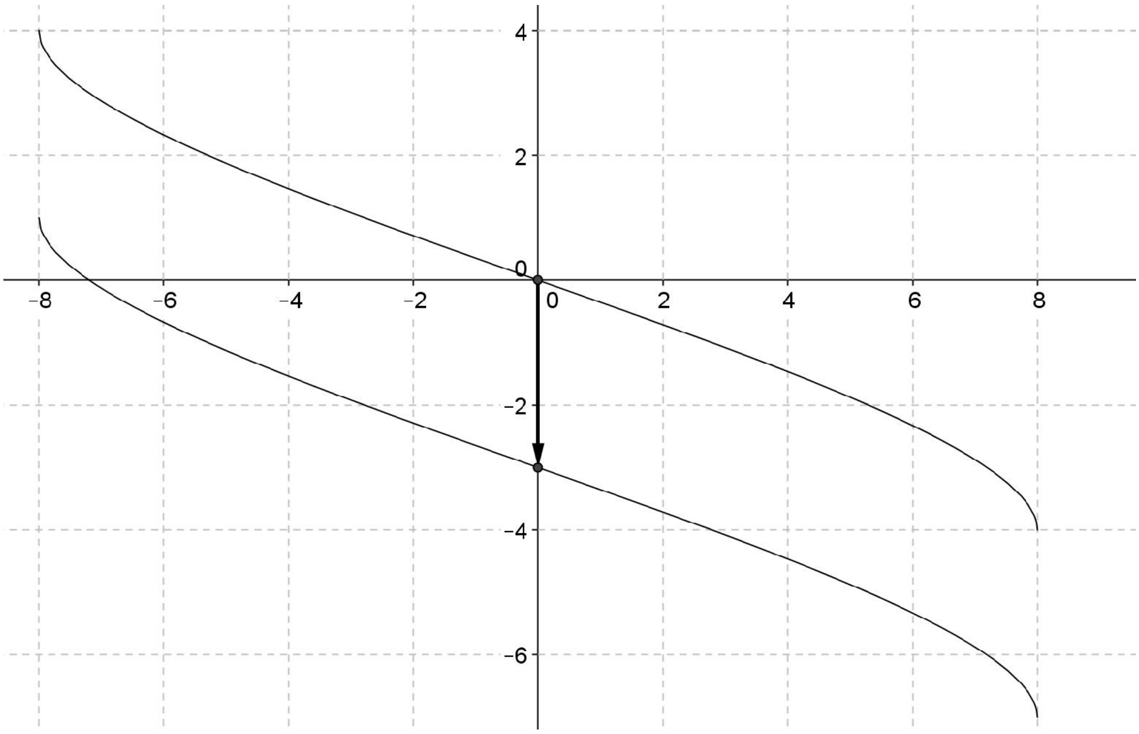
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq 8 + x_1 < 8 + x_2 \Rightarrow \sqrt{8 + x_1} < \sqrt{8 + x_2} \Rightarrow -\sqrt{8 + x_1} > -\sqrt{8 + x_2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2),

$$\sqrt{8 - x_1} - \sqrt{8 + x_1} > \sqrt{8 - x_2} - \sqrt{8 + x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) > f(x_2)$*, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.*

Σημείωση 2: *Μια γραφική ερμηνεία για την γραφική παράσταση της g είναι ότι αν μετακινηθεί 3 μονάδες παρακάτω δεν θα είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα y΄y (δηλ. όχι άρτια) και ούτε ως προς την αρχή των αξόνων (δηλ. ούτε περιττή). Δείτε το παρακάτω σχήμα.*



Σημείωση 3: *Για την συνάρτηση h, μπορούμε και αλγεβρικά να συμπεράνουμε ότι δεν είναι άρτια, ούτε και περιττή από το πεδίο ορισμού, που είναι το εξής:*
$(x+3) \in [-8,8] \Rightarrow -8 \le x+3 \le 8 \Rightarrow -11 \le x \le 5$, *άρα* $A_h = [-11,5]$ *που δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, άρα αν το* $x \in A_h$, *δεν είμαστε σίγουροι ότι και το* $-x \in A_h$.

Σημείωση 4: *Τέλος για την h μπορούμε να το διαπιστώσουμε και με την απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η h είναι περιττή, τότε:*

$$h(-x) = -h(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} h(0) = -h(0)$$
$$\Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow f(3) = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{11} = 0 \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{11}$$

άτοπο!!
Έστω ότι η h είναι άρτια, τότε:

$$h(-x) = h(x) \overset{x=1}{\Rightarrow} h(-1) = h(1) \Rightarrow f(2) = f(4) \overset{f:\mu o\nu.}{\Rightarrow} 2 = 4 \ \textbf{\textit{άτοπο!}}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17842)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d, \quad x \in \mathbb{R}$
με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0,16)$ και $B(4,0)$.
α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

Μονάδες 10

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,
i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

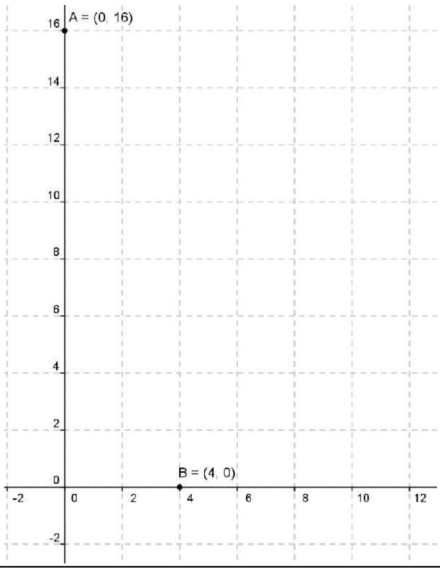
Μονάδες 3

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πως αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 6

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Μονάδες 6



ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,16)$, θα ισχύει:

$$f(0)=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0-c)^2-d=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2-d=16 \Leftrightarrow c^2-2d=32 \ \ (1).$$

Ομοίως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται και από το σημείο $B(4,0)$, άρα ισχύει:

$$f(4)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4-c)^2-d=0 \Leftrightarrow (4-c)^2-2d=0 \ \ (2).$$

Συνεπώς από τα δεδομένα της εκφώνησης προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τις μεταβλητές c και d:

$$(\Sigma)\ \begin{cases} c^2-2d=32 \\ (4-c)^2-2d=0 \end{cases}$$

Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$(4-c)^2-2d=0 \Leftrightarrow 16-8c+c^2-2d=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 16-8c+32=0 \Leftrightarrow -8c=-32-16=-48 \Leftrightarrow$$
$$c=\frac{-48}{-8}=6.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$6^2-2d=32 \Leftrightarrow 36-2d=32 \Leftrightarrow -2d=32-36=-4 \Leftrightarrow d=\frac{-4}{-2}=2.$$

Άρα τελικά οι σταθερές c και d παίρνουν τις τιμές $c=6$ και $d=2$.

β) Για $c=6$ και $d=2$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ είναι τα σημεία που έχουν $y=0$, δηλαδή τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-6)^2-2=0 \Leftrightarrow (x-6)^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)^2=4 \Leftrightarrow x-6=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$
$$\Leftrightarrow x-6=2 \text{ ή } x-6=-2$$
$$\Leftrightarrow x=2+6=8 \text{ ή } x=-2+6=4.$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία $B(4,0)$ και $\Gamma(8,0)$.

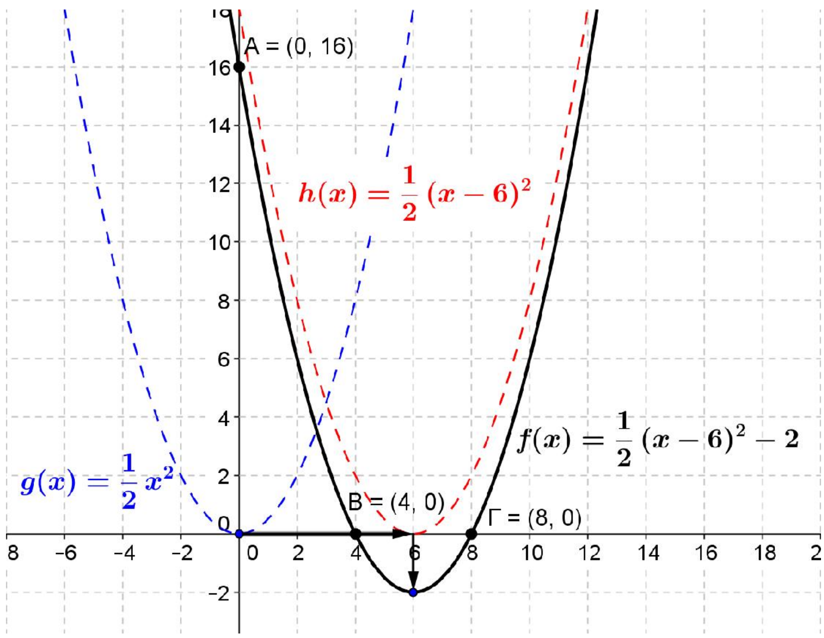
Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ είναι το σημείο που έχει $x=0$. Το σημείο αυτό θα έχει τεταγμένη

$$y=f(0)=\frac{1}{2}(0-6)^2-2=\frac{1}{2}\cdot 6^2-2=\frac{36}{2}-2=18-2=16,$$

δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,16)$.

Σχόλιο: Ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί και να παρακαμφθεί αν σκεφτούμε ότι κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης τέμνεται από οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία σε ένα το πολύ σημείο της. Γνωρίζουμε ήδη από την υπόθεση ότι το σημείο $A(0,16)$ *είναι σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της f, και φυσικά είναι σημείο του άξονα* $y'y$, *αφού έχει τετμημένη ίση με 0, συνεπώς αυτό θα είναι και το ζητούμενο σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον κατακόρυφο άξονα* $y'y$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η γραφική αυτή παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ με οριζόντια μετατόπισή της κατά 6 μονάδες προς τα δεξιά και στη συνέχεια κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

iii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή $f_{min}=-2$ για $x=6$, η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty,6]$ και $[6,+\infty)$ και πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,6]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,+\infty)$.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (20332)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^2,\quad x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1,\quad x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Μονάδες 10

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

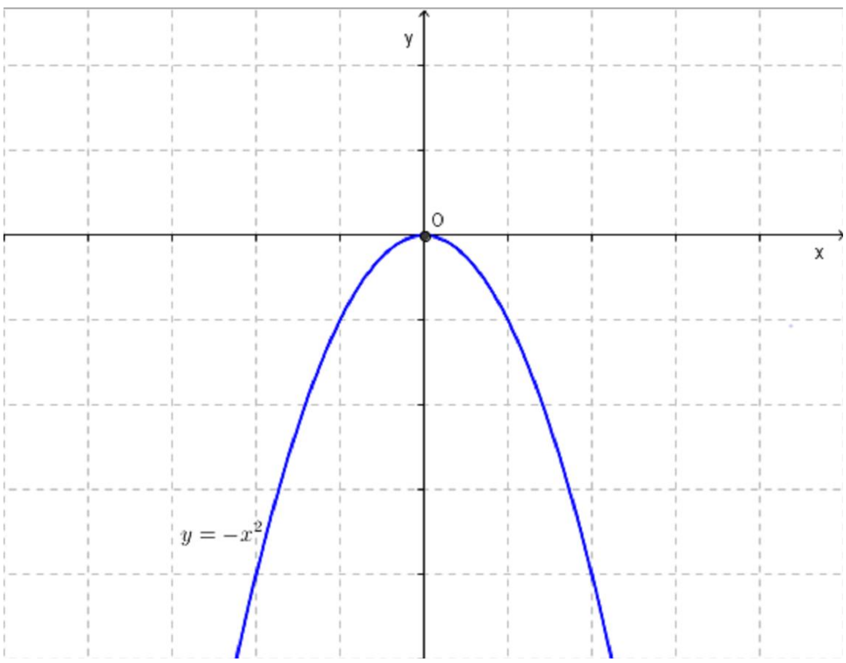
Μονάδες 5

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

Μονάδες 5

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$, $\kappa<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή της.

Μονάδες 5



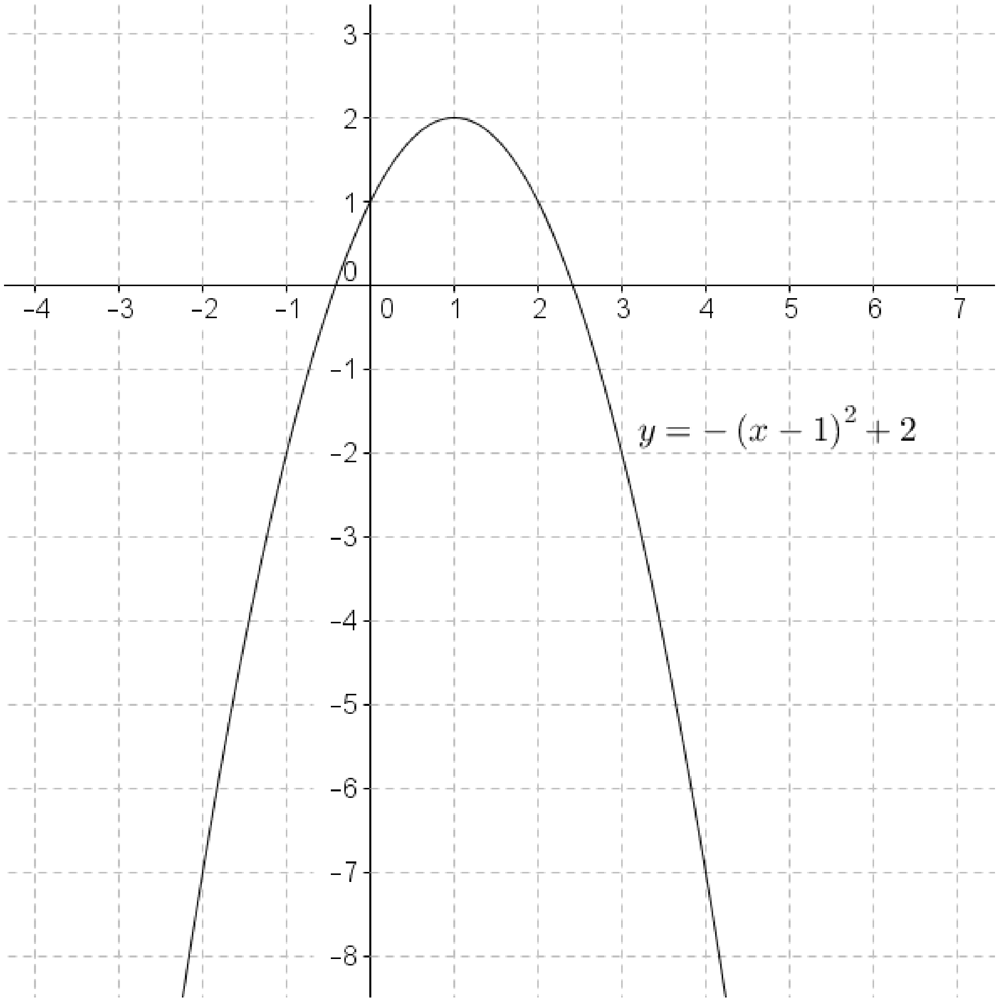
ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 2 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2,$$

άρα $f(x) = -(x-1)^2 + 2$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2 = \varphi(x-1) + 2$, άρα η γραφική της παράσταση θα προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης φ με οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδα επάνω.



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f βρίσκουμε ότι:

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$, το $f(1) = 2$

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = κ , κ < 2 είναι 2, καθώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πάντα δύο σημεία τομής με την οριζόντια ευθεία $y = \kappa$, αν $\kappa < 2$

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Αντί κάποιων ψηγμάτων θεωρίας ή «κατάλληλων» μεθοδολογιών, θα αναφερθούμε σε ένα σημείο που, κατά την άποψή μας, είναι πηγή παρερμηνειών, απλουστεύσεων ή ακόμη και λαθών.

Αναφερόμαστε σε συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$.

- Αρχικά, σε εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (§3.4) υπάρχουν συμπεράσματα για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho>0$ και $\omega>0$ (1):
  - έχουν μέγιστη τιμή το ρ και ελάχιστη τιμή το $-\rho$,
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

- Για τις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho<0$ και $\omega>0$ (2) (*βλέπε §3.4, άσκηση 1, Ά Ομάδας)*, μπορούμε να καταλήξουμε σε αντίστοιχα συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σε σχέση με τις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho>0$ και $\omega>0$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$, και έτσι να πούμε:
  - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|$ (*αλλά σε διαφορετικά σημεία*)
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

- Στην περίπτωση όπου $\omega<0$, κάνουμε χρήση των τύπων που ισχύουν για αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο και να παρατηρήσουμε ότι:
  - $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)=\rho\cdot\eta\mu(-(-\omega x))=-\rho\cdot\eta\mu(-\omega x)=-\rho\cdot\eta\mu(|\omega|x)$
  - $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(-(-\omega x))=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(-\omega x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(|\omega|x)$

  Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τις σχέσεις (1) και (2), καταλήγουμε στα αντίστοιχα συμπεράσματα για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho,\omega\in\mathbb{R}$ (3):
  - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|$ (*αλλά σε διαφορετικά σημεία*)
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

- Τέλος, για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ (*βλέπε §3.4, ασκήσεις 2, 7 Ά Ομάδας και 3, 4 Β' Ομάδας)* μπορούμε να συνδυάσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα και την κατακόρυφη μετατόπιση που έχουν σχετικά πρόσφατα διδαχθεί οι μαθητές. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι έχουν γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από τις αντίστοιχες των συναρτήσεων $\varphi(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $\gamma(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, με κατακόρυφη μετατόπιση κατά k μονάδες (προς τα επάνω αν $k>0$ ή προς τα κάτω αν $k<0$).
Τότε μπορούμε να πούμε ότι:
    - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|+k$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|+k$
    - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ (*αφού η κατακόρυφη μετατόπιση δεν επηρεάζει την περίοδο της συνάρτησης*)

- Όσον αφορά στις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\varepsilon\varphi(\omega x),\ \rho,\omega\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\varphi(\omega x),\ \rho,\omega\in\mathbb{R}$, κατά την άποψή μου, δεν μπορούμε να βγάζουμε απ' ευθείας συμπεράσματα.
Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να υποπτευόμαστε την περίοδο και να το αποδεικνύουμε αναλυτικά, όπως στις εφαρμογές 1 και 2 του σχολικού βιβλίου (§3.4). Π.χ. $f(x)=\varepsilon\varphi 2x$ (*βλέπε §3.4, άσκηση 8 Ά Ομάδας)*

Σχόλιο:
Στην συγκεκριμένη συλλογή ασκήσεων, τα παραπάνω αφορούν κυρίως στις ασκήσεις:

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17704)

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17843)

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17852)

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (17855)

§3.2 - Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17663)

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\cdot\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, άρα, από τη σχέση

$$(2\sigma\upsilon\nu x + 1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$$

προκύπτει ότι:

$$\{\ 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \ \text{ ή } \ 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0\ \} \Leftrightarrow \{\ \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}\ \}.$$

Επειδή όμως $0 < x < \frac{\pi}{2}$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu x > 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$.

β) Από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ παίρνουμε ότι $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$. Αντικαθιστούμε το $\sigma\upsilon\nu x$ με $\frac{4}{5}$ και έχουμε:

$$\eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}, \text{ δηλαδή } \ \eta\mu^2 x = \frac{9}{25}.$$

Επειδή όμως $0 < x < \frac{\pi}{2}$ προκύπτει ότι $\eta\mu x > 0$, οπότε $\eta\mu x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$,

δηλαδή $\eta\mu x = \frac{3}{5}$.

Από τις ταυτότητες $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ αντικαθιστώντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \ \ \sigma\varphi x = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Οπότε, $\varepsilon\varphi x = \frac{3}{4}$, $\sigma\varphi x = \frac{4}{3}$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-*§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 25

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17844)

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Μονάδες 12

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\text{συν}\omega + \text{ημ}\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) **Α΄ τρόπος:** Έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, οπότε λύνουμε την πρώτη ως προς y και έχουμε:

$$\begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+\left[-(x+1)\right]^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+(x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+x^2+2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-(x+1) \\ 2x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ 2x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Επομένως, $(0,-1)$ ή $(-1,0)$ οι δύο λύσεις

Β΄ τρόπος : Έχουμε,

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Επομένως, $(0,-1)$ ή $(-1,0)$ οι δύο λύσεις

β) Έχουμε:

$$\text{συν}\omega+\text{ημ}\omega=-1 \text{ και } \text{συν}^2\omega+\text{ημ}^2\omega=1,$$

παρατηρούμε ότι είναι το αρχικό σύστημα αν θεωρήσουμε $x=\text{συν}\omega$ & $y=\text{ημ}\omega$.

Επομένως από το α) ερώτημα οι λύσεις του συστήματος είναι:

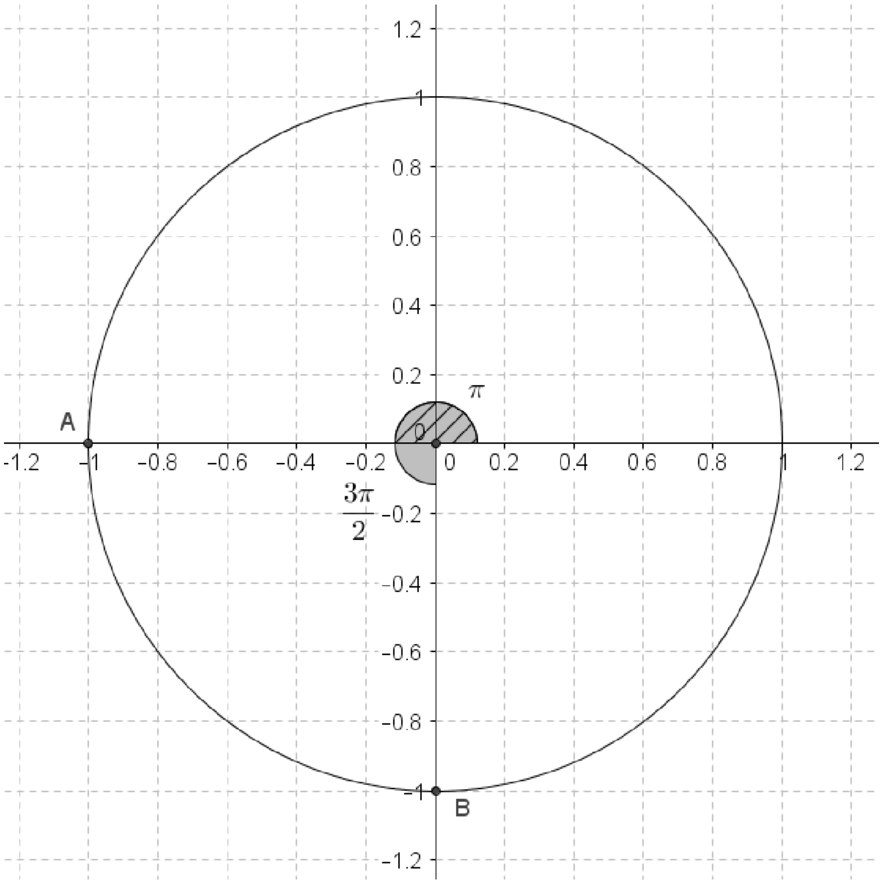
$$(x,y)=(-1,0) \text{ ή } (x,y)=(0,-1).$$

Δηλαδή

$$\left\{(\text{συν}\omega,\text{ημ}\omega)=(-1,0) \text{ ή } (\text{συν}\omega,\text{ημ}\omega)=(0,-1)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{συν}\omega=-1 \\ \text{ημ}\omega=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \text{συν}\omega=0 \\ \text{ημ}\omega=-1 \end{cases} \overset{0\le\omega\le2\pi}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \omega=\pi \text{ ή } \omega=\frac{3\pi}{2}$$

Η απεικόνιση των λύσεων στον τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται με την βοήθεια των σημείων Α και Β των αρνητικών ημιαξόνων Οx΄ και Οy΄ αντίστοιχα.



Παρόμοιες Ασκήσεις :

§3.3 - Αναγωγή στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17699)

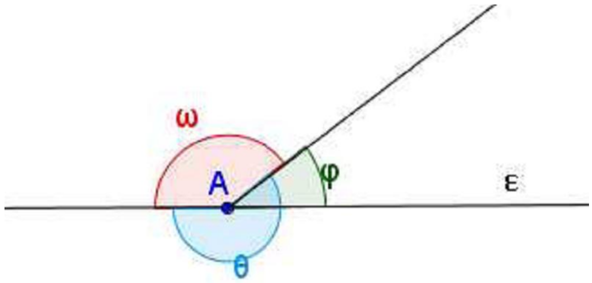
Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

Μονάδες 15



ΛΥΣΗ

α) Αν $\hat{\varphi}$ οξεία γωνία, τότε $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ δηλαδή είναι γωνία του 1$^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου όπου είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi>0$ (1).

Ισχύει,

$$\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi=1-\eta\mu^2\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi=\frac{16}{25} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4}{5}$$

β) Από το σχήμα που δίνεται έχουμε,

- $\hat{\theta}=\pi+\varphi$, οπότε από τύπους αναγωγής στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο για τις γωνίες που διαφέρουν κατά π είναι

  $$\eta\mu\theta=\eta\mu(\pi+\varphi)=-\eta\mu\varphi=-\frac{3}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu(\pi+\varphi)=-\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}$$

- Ενώ $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=180^{\circ} \Leftrightarrow \hat{\omega}=180^{\circ}-\hat{\varphi}$, οπότε από τύπους αναγωγής στο 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες είναι,

  $$\eta\mu\omega=\eta\mu\left(180^{\circ}-\varphi\right) \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\frac{3}{5}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\left(180^{\circ}-\varphi\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: -

§3.4 - Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17656)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f;

Μονάδες 9

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Μονάδες 10

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

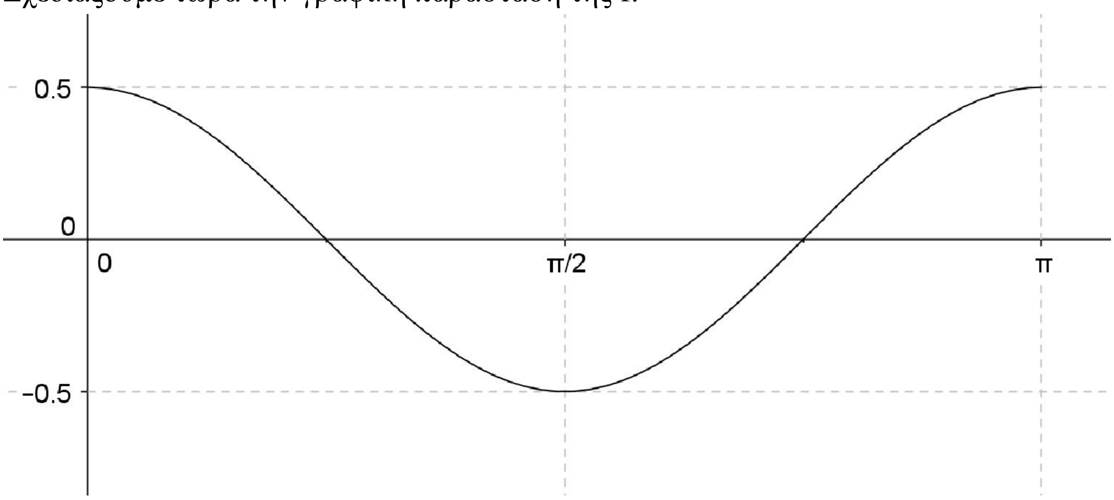
α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\rho=\frac{1}{2}>0$ και $\omega=2>0$. Άρα,

$\min f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ η ελάχιστη τιμή της f και $\max f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$ η μέγιστη τιμή της f. Επιπλέον, η περίοδος της f θα είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

β) Συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών για την f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$

Σχεδιάζουμε τώρα την γραφική παράσταση της f:



γ) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι το $\frac{1}{2}$, άρα, $f(x)\le\frac{1}{2}<1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση f δε μπορεί να πάρει την τιμή 1.

<u>Παρόμοιες Ασκήσεις</u> : Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17693)

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4},\ \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

Μονάδες 12

β) Αν $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$\frac{17\pi}{10}=\frac{10\pi+7\pi}{10}=\pi+\frac{7\pi}{10}$$

Έτσι έχουμε,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi}{10}+\frac{7\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{7\pi}{10}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{7\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}\ (1)$$

Ακόμη είναι,

$$0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{10}<\frac{\pi}{2}\ \left(\text{αφού } \frac{3\pi}{10}<\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \text{ και } \frac{5\pi}{20}=\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{10}=\frac{6\pi}{20}\right)$$

και η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu 0>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}>\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\overset{(1)}{\Rightarrow}0<\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}<1$$

β) **<u>1ος τρόπος</u>**

Από τους τύπους αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο για τις συμπληρωματικές γωνίες έχουμε,

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)=\sigma\upsilon\nu x_1 \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)=\sigma\upsilon\nu x_2$$

με $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$ και αφού η $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει,

$$\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x_1<\sigma\upsilon\nu x_2\Rightarrow\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)<\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$$

<u>2ος τρόπος</u>

Έχουμε,

$$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi > -x_1 > -x_2 > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \pi > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > -\pi \underset{\text{στο } \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\text{ημx} \uparrow}{\Leftrightarrow}} \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: -

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17704)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\text{συν}2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

Μονάδες 13

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\text{συν}2x$					
$f(x) = -3\text{συν}2x$					

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \kappa \cdot \text{συν}(\omega x)$ που είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ με $\omega = 2$ και $\kappa = -3$, άρα έχουμε, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

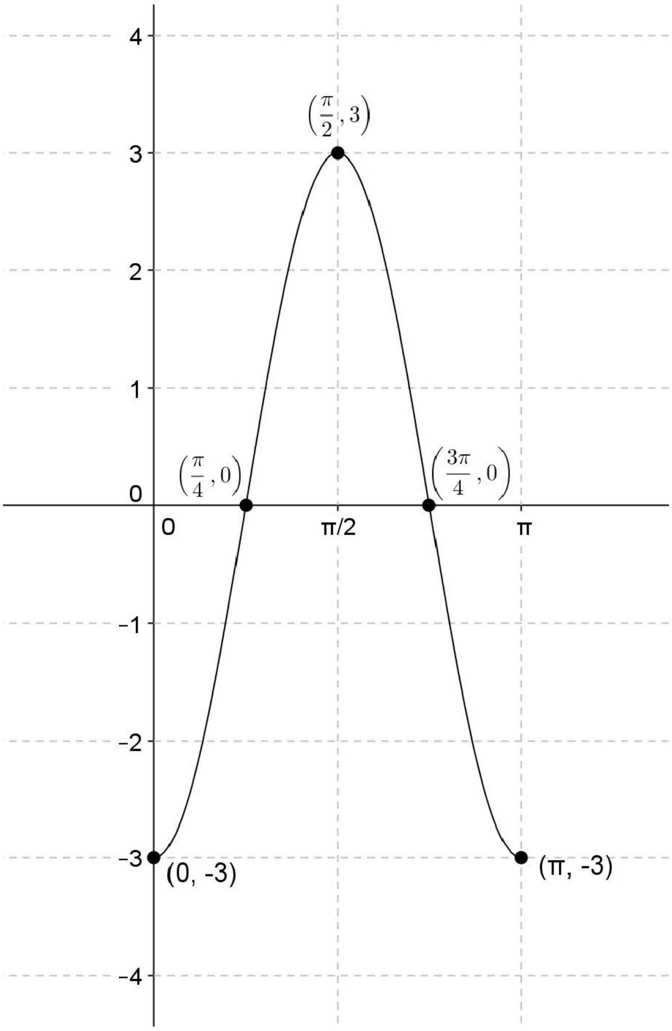
$$|\text{συν}2x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \text{συν}2x \le 1 \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} 3 \ge -3 \cdot \text{συν}2x \ge -3 \Leftrightarrow f(-\pi) \ge -3 \cdot \text{συν}2x \ge f(0)$$

Άρα το ελάχιστο της f είναι το -3 και το μέγιστο της το 3

β) Ο πίνακας συμπληρωμένος μετά τις πράξεις είναι,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{συν}2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3\text{συν}2x$	-3	0	3	0	-3

Ενώ η C_f σε διάστημα μιας περιόδου, δηλαδή στο $[0, \pi]$ φαίνεται παρακάτω,



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5,6

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17725)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right), x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$

Μονάδες 10

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

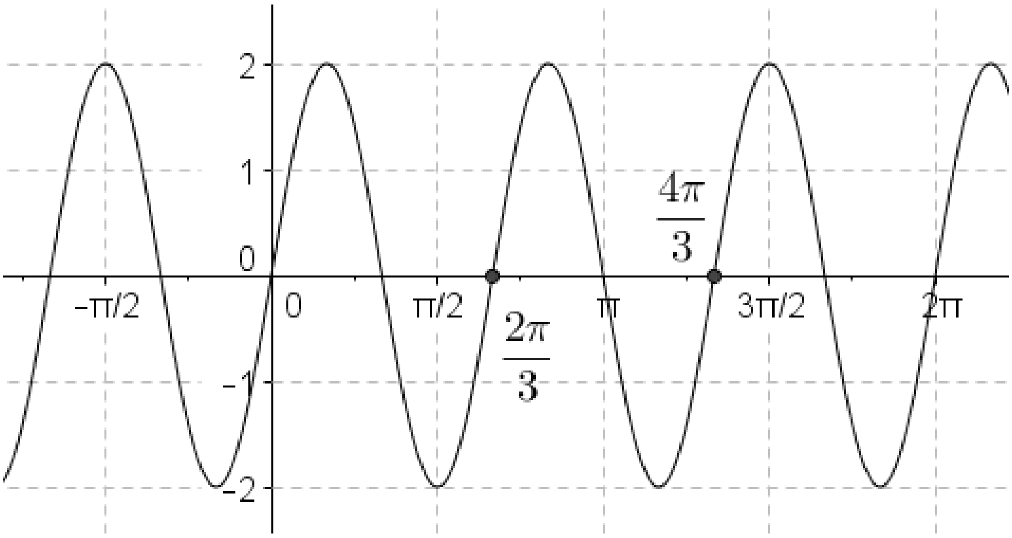
α) Έχουμε,

$$f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \eta\mu 3x + \eta\mu 3x = 2\eta\mu 3x$$

από τύπους αναγωγής στο 1^{o} τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες (στην πρώτη περίπτωση) και από τύπους αναγωγής στο 1^{o} τεταρτημόριο για τις συμπληρωματικές γωνίες (στην δεύτερη περίπτωση) β) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ με $\omega=3$ και $\rho=2$, που είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Επομένως, η συνάρτηση έχει ελάχιστο το -2, μέγιστο το 2 και περίοδο $T=\frac{2\pi}{3}$.

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.3* Β΄ Ομάδας / Άσκηση -*§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19913) (νέο θέμα 30 -11 – 2014)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2, x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\eta\mu 2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$f(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=(\eta\mu x)^2+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+(\sigma\upsilon\nu x)^2=\underbrace{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}_{1}+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1+\eta\mu 2x$$

β) Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x)=\eta\mu 2x$ η οποία είναι της μορφής $\rho\cdot\eta\mu\omega x$, όπου ρ=1>0 και ω=2 > 0. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης φ θα είναι ρ = 1 και η ελάχιστη τιμή της –ρ= – 1 και η περίοδός της $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Άρα, η συνάρτηση $f(x)=1+\varphi(x)$ θα έχει περίοδο ίδια με την περίοδο της φ, δηλαδή
T = π και
μέγιστη τιμή maxf(x) =1+maxφ(x) = 1 + 1 = 2
ελάχιστη τιμή minf (x) = 1 + minφ(x) =1 + (-1) = 0

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17841)

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right), \quad 0 \le t \le 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστον και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

Μονάδες 3

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μία περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180sec;

Μονάδες 4+2=6

δ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

Μονάδες 3

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \le t \le 90$.

Μονάδες 5

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση h είναι συνάρτηση της μορφής

$$h(t) = \rho \cdot ημ(\omega t) + c \text{ με } \rho = 6,\ \omega = \frac{\pi}{30} \text{ και } c = 8.$$

Η γραφική της παράσταση προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \rho \cdot ημ(\omega t)$ κατά $c = 8$ μονάδες μήκους προς τα πάνω.

Η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή $g_{max} = 6$ και ελάχιστη τιμή $g_{min} = -6$ (αφού $\rho = 6$), άρα αντίστοιχα η συνάρτηση h έχει μέγιστη τιμή $h_{max} = g_{max} + 8 = 6 + 8 = 14$ και ελάχιστη τιμή $h_{min} = g_{min} + 8 = -6 + 8 = 2$.

Συνεπώς, το μέγιστο ύψος που φτάνει το κάθισμα είναι $h_{max} = 14m$ ενώ το ελάχιστο ύψος είναι $h_{min} = 2m$.

Για να βρούμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος εργαζόμαστε ως εξής:

$h(t)=h_{max}=14$ όταν

$8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=14 \Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=14-8=6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=1\ \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\frac{\pi\cdot t}{30}=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{t}{30}=2k+\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=60k+15, k\in\mathbb{Z}$.

Επιπλέον ισχύει $0\le t\le 180$ άρα

$$0\le 60k+15\le 180 \Leftrightarrow -15\le 60k\le 165 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le \frac{165}{60} \Leftrightarrow -0,25\le k\le 2,75$$

και αφού $k\in\mathbb{Z}$ το k μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 ή 2.

Για $k=0$ έχουμε $t=60\cdot 0+15=15$, για $k=1$ έχουμε $t=60\cdot 1+15=75$ ενώ για $k=2$ έχουμε $t=60\cdot 2+15=135$, άρα το κάθισμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τις χρονικές στιγμές 15sec, 75sec και 135sec.

Αντίστοιχα θα βρούμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος ως εξής:

$h(t)=h_{min}=2$ όταν

$8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=2 \Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=2-8=-6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi\cdot t}{30}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{t}{30}=2k+\frac{3}{2}, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=60k+45, k\in\mathbb{Z}$

Επιπλέον ισχύει $0\le t\le 180$ άρα

$$0\le 60k+45\le 180 \Leftrightarrow -45\le 60k\le 135 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le \frac{135}{60} \Leftrightarrow -0,75\le k\le 2,25$$

και αφού $k\in\mathbb{Z}$ το k μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 ή 2.

Για $k=0$ έχουμε $t=60\cdot 0+45=45$, για $k=1$ έχουμε $t=60\cdot 1+45=105$ ενώ για $k=2$ έχουμε $t=60\cdot 2+45=165$, άρα το κάθισμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τις χρονικές στιγμές 45sec, 105sec και 165sec.

β) Αν R είναι η ακτίνα της ρόδας τότε ισχύει $h_{max}-h_{min}=2R$, αφού οι θέσεις μέγιστου και ελάχιστου ύψους είναι αντιδιαμετρικά σημεία της κυκλικής τροχιάς του καθίσματος.

Συνεπώς

$$h_{max}-h_{min}=2R \Rightarrow 2R=14-2=12 \Rightarrow R=6,$$

δηλαδή η ακτίνα της ρόδας είναι $R=6m$.

γ) Ο χρόνος μίας πλήρους περιστροφής της ρόδας είναι πχ ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του καθίσματος από τη θέση μέγιστου ύψους (ή ελάχιστου ύψους, ή γενικά οποιαδήποτε συγκεκριμένης θέσης της τροχιάς), άρα αφού πχ το κάθισμα βρίσκεται στη θέση μέγιστου ύψους τις διαδοχικές χρονικές στιγμές 15sec και 75sec, η περίοδος της κίνησης είναι $T = 75\sec - 15\sec = 60\sec$.

Επίσης μπορούμε $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60\sec$

Επιπλέον το διάστημα από 0sec έως 180sec (δηλαδή χρονικό διάστημα 180sec) είναι χρονικό διάστημα στο οποίο γίνονται $180\sec : 60\sec = 3$ πλήρεις περιστροφές του τροχού ή 3 γύροι για τις δύο φίλες.

δ) i. Ο πίνακας τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$, σε m, συμπληρώνεται ως εξής:

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$	8	14	8	2	8	14	8

αφού:

για $t = 0\sec$ είναι $h(0) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 0}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ0 = 8 + 6 \cdot 0 = 8$,

για $t = 15\sec$ είναι $h(15) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 15}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ\frac{\pi}{2} = 8 + 6 \cdot 1 = 14$,

για $t = 30\sec$ είναι $h(30) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 30}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ\pi = 8 + 6 \cdot 0 = 8$,

για $t = 45\sec$ είναι $h(45) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 45}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ\frac{3\pi}{2} = 8 + 6 \cdot (-1) = 2$,

για $t = 60\sec$ είναι $h(60) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 60}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ2\pi = 8 + 6 \cdot 0 = 8$,

για $t = 75\sec$ είναι $h(75) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 75}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ\frac{5\pi}{2} = 8 + 6 \cdot 1 = 14$,

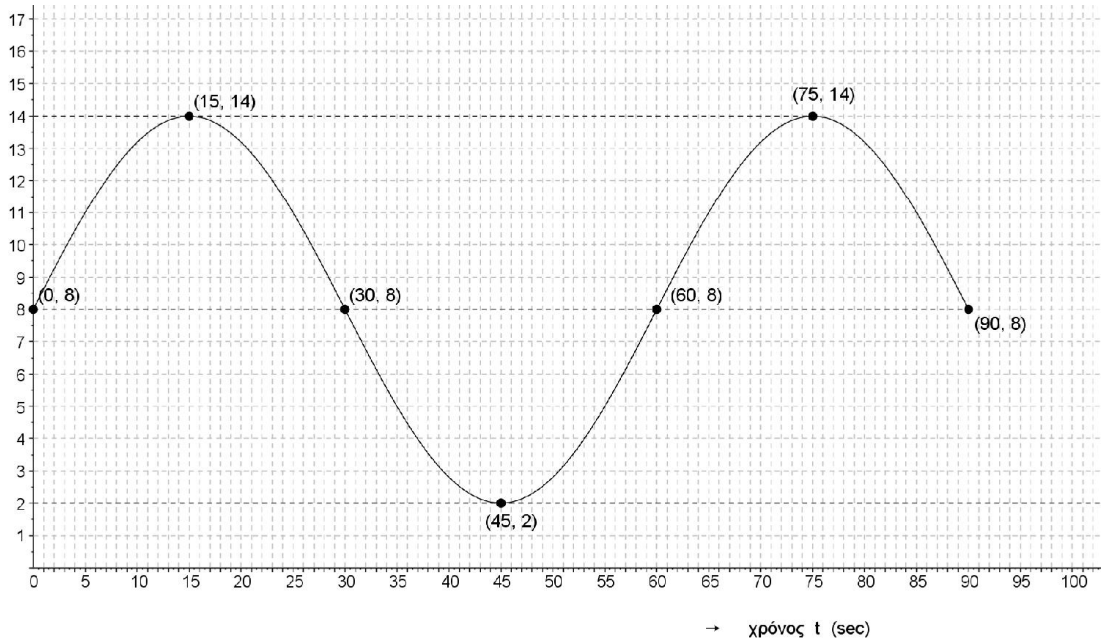
αφού $ημ\frac{5\pi}{2} = ημ\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = ημ\frac{\pi}{2} = 1$

για $t = 90\sec$ είναι $h(90) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot 90}{30}\right) = 8 + 6 \cdot ημ3\pi = 8 + 6 \cdot 0 = 8$,

αφού $ημ3\pi = ημ(2\pi + \pi) = ημ\pi = 0$.

ii. Η $h(t) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ έχει Τ=60 ,μέγιστη τιμή 14 και ελάχιστη τιμή το 2.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \le t \le 90$ δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2,3

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17852)

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta \text{ όπου α, ω, β πραγματικές σταθερές.}$$

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6sec.

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$

Μονάδες 5

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

Μονάδες 8

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h(t), για $0 \le t \le 12$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Ξέρουμε ότι η περίοδος δίνεται από το τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, μας δίνεται από τα δεδομένα της άσκησης ότι η περίοδος είναι 6sec, επομένως έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\omega} = 6 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$$

β) Έχουμε,

$$h(0)=20 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0)+\beta=20 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+\beta=20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha+\beta=20}$$

Εφόσον η περίοδος του ελατηρίου είναι 6sec και μια πλήρη ταλάντωση σημαίνει κίνηση στις θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο, άρα το παιγνίδι θα χρειαστεί το μισό χρόνο (3sec) για να φτάσει στο μέγιστο ύψος του .

$$h(3)=100 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)+\beta=100 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+\beta=100 \Leftrightarrow \boxed{-\alpha+\beta=100}$$

Λύνουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων, και έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=20\\ -\alpha+\beta=100\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\beta=120 \Rightarrow \boxed{\beta=60}. \text{ Επομένως : } \alpha+60=20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-40}$$

Άρα η συνάρτηση θα έχει τύπο:

$$h(t)=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{3}\right)+60$$

γ) Έχουμε,

$$h(14)=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3}\right)+60=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+60=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+60$$

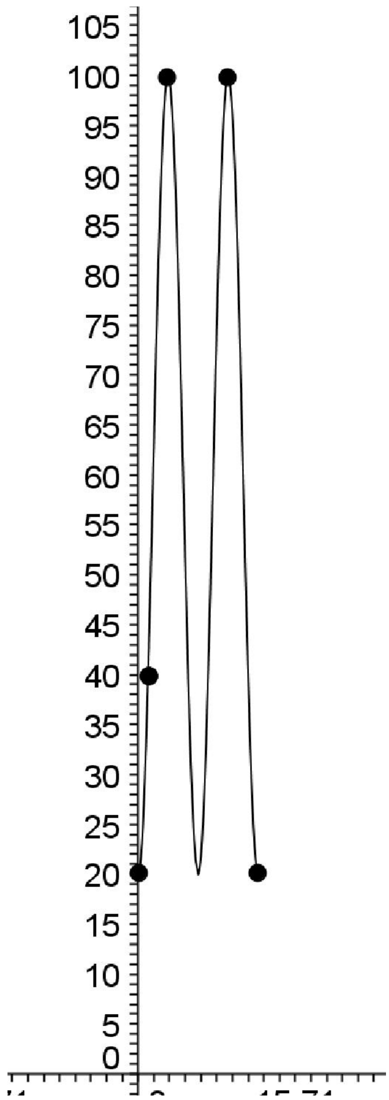
$$=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)+60$$

$$=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+60$$

$$=-40\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+60$$

$$=-40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+60=20+60=80$$

δ) Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.



Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

§3.5 - Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16968)

α) Είναι η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0 \Leftrightarrow 3\cdot(\sigma\upsilon\nu 4x+1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x+1=0 \ (1)$$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ η (1) γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\pi+1=0 \Leftrightarrow -1+1=0,\text{ που ισχύει.}$$

Δηλαδή, το $\frac{\pi}{4}$ επαληθεύει την (1), άρα, είναι λύση της.

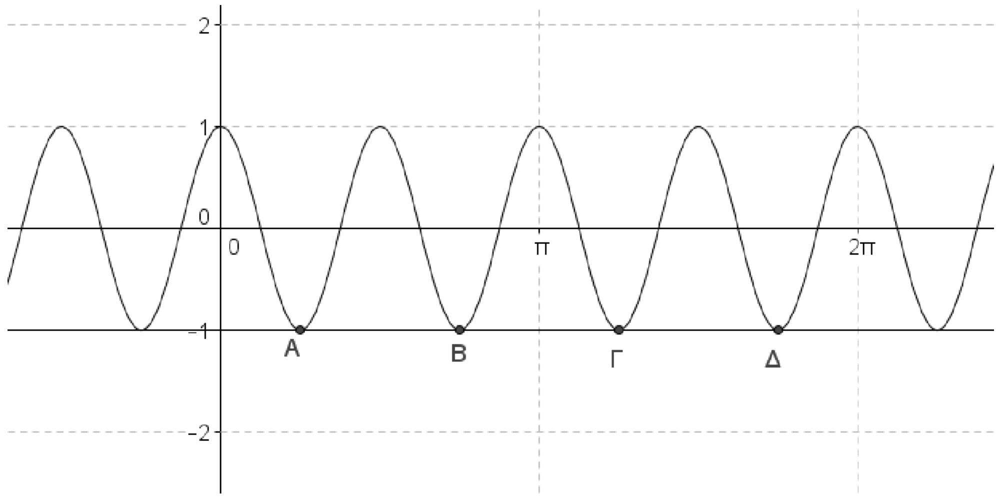
β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-1$.

Οπότε έχουμε:

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\kappa\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, όπου σε πλάτος κάθε περιόδου, εμφανίζονται τα 4 σημεία τομής.



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2 (iv)

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17652)
Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega=0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega=0$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ
α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1 &\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}_{1}+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1\\ &\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1\\ &\Leftrightarrow 2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=0\\ &\Leftrightarrow \eta\mu\omega=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=0\end{aligned}$$

β) Έχουμε,

$$\eta\mu\omega=0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2k\pi+0\\ \text{ή}\\ \omega=2k\pi+(\pi-0)\end{cases},k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2k\pi\\ \text{ή}\\ \omega=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\omega=\lambda\pi$,$\lambda\in\mathbb{Z}$

Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu\omega=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} ,k\in\mathbb{Z}$$

Τελικά, οι δυνατές τιμές της γωνίας ω είναι $\omega=k\pi$ ή $\omega=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbb{Z}$.

(Η δεύτερη μορφή γράφεται ισοδύναμα και ως εξής: $\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbb{Z}$)

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (i,iii), Άσκηση 5

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17681)
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

Μονάδες 10

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) **1ος τρόπος: (Αλγεβρικά)**

Από τη γνωστή σχέση $-1 \le ημx \le 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε,

$$-1 \le ημx \le 1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} -2 \le 2ημx \le 2 \overset{+1}{\Leftrightarrow} -2+1 \le 2ημx+1 \le 2+1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 2ημx+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 3 \quad (1).$$

Όμως,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2ημ\frac{\pi}{2}+1 = 2\cdot 1+1 = 3 \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1 = 2\cdot(-1)+1 = -1.$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι -1 και η μέγιστη 3.

$2^{ος}$ Τρόπος (γεωμετρικά)

Η συνάρτηση $g(x) = 2ημx$ είναι της μορφής $ρσυν(ωx)$ με $ρ = 2 > 0$ και $ω = 1 > 0$.

Άρα, η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με το $ρ = 2$ και η ελάχιστη ίση με το $-ρ = -2$

Η συνάρτηση $f(x) = 2ημx+1$, $x \in \mathbb{R}.$, έχει γραφική παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη της g με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα επάνω. Κατά συνέπεια η συνάρτηση f θα έχει μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστη τιμή το -1.

β) Αναζητούμε $x \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε,

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2ημx+1 = 3 \Leftrightarrow ημx = 1 \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \ (1).$$

Όμως έχουμε τον περιορισμό

$$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k + \frac{1}{2} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 4k+1 \le 4$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 4k \le 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le k \le \frac{3}{4} \ \text{ και } \ k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $k = 0$.

Οπότε η σχέση (1) δίνει $x = \frac{\pi}{2}$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-*§3.5*Α΄ Ομάδας / Άσκηση 12

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17692)

α) Να αποδείξετε ότι $ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + συν(\pi+x) = 0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $συνx = -ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x\,,$$

[διότι είναι οι γωνίες με άθροισμα $\frac{\pi}{2}$ rad και έτσι το ημίτονο της μιας είναι το συνημίτονο της άλλης], δηλαδή $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$.

Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$$

[διότι οι γωνίες που διαφέρουν κατά π rad έχουν αντίθετα συνημίτονα].
Οπότε από (1) και (2) έχουμε,

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0$$

β) Η σχέση $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}. \quad (3)$$

Έχουμε όμως τον περιορισμό

$$0\le x<2\pi\Leftrightarrow 0\le k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi\Leftrightarrow 0\le k+\frac{1}{2}<2\Leftrightarrow 0\le 2k+1<4.$$

$$\Leftrightarrow -1\le 2k\le 3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{2}$$

όμως $k\in\mathbb{Z}$, άρα $k=0$ ή $k=1$.

- Για $k=0$ η σχέση (3) δίνει $x=\frac{\pi}{2}$.
- Για $k=1$ η σχέση (3) δίνει $x=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.3* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5,6-*§3.5 Β΄* Ομάδας / Άσκηση 1,5

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17736)

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\eta\mu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$, $x\neq 2\kappa\pi\ ,\kappa\in\mathbb{Z}$

α) Να αποδείξετε ότι $A=1+\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0,2\pi)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε,

$$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$$

β) Αφού $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$, η εξίσωση, ισοδύναμα, γίνεται:

$1+\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

Όμως $x \in (0, 2\pi)$ άρα :

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$

  $0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0-\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3}$.

  Αφού $\kappa \in Z$ τότε $\kappa = 0$ άρα $x = \frac{2\pi}{3}$

- Αν $x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}$

  $0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0+\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \kappa < \frac{4}{3}$. Αφού $\kappa \in Z$ τότε $\kappa = 1$ άρα $x = \frac{4\pi}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 10,11-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (17739)

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την γωνία x

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Από τύπους αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες και για τις γωνίες που διαφέρουν κατά π ακτίνια, είναι:

$$\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - [-\eta\mu x] = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$$

β) **1ος τρόπος**

Έχουμε,

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6}, \text{ θα είναι } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή η μοναδική (*λόγω μονοτονίας*) γωνία από π/2 έως π $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ που δίνει ημίτονο $\frac{1}{2}$ είναι απευθείας η $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

2ος τρόπος

Έχουμε,

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right), \kappa \in \mathbb{Z}$, και αφού $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ έχουμε :

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ τότε

  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} < 2\kappa\pi < \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \kappa < \frac{5}{12}$, αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε δεν υπάρχει κ

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ τότε

  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} < 2\kappa\pi < \pi - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{12}$, αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $\kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5 Α΄* Ομάδας / Άσκηση -*§3.5 Β΄* Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (17741)

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$, είναι:

$$\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} + \frac{\eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= \frac{\eta\mu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

β) Για $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\frac{ημx}{1-συνx}+\frac{ημx}{1+συνx}=\frac{4}{\sqrt{3}}\overset{(α)}{\Leftrightarrow}\frac{2}{ημx}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 4ημx=2\sqrt{3}\Leftrightarrow ημx=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow ημx=ημ\frac{π}{3}\Leftrightarrow x=\left(2κπ+\frac{π}{3}\text{ ή } x=2κπ+π-\frac{π}{3}\right),\ κ\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\left(2κπ+\frac{π}{3}\text{ ή } x=2κπ+\frac{2π}{3}\right),\ κ\in\mathbb{Z}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 11- *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17837)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|α+1|ημ(βπx)$ με $α\in\mathbb{R}$ και $β>0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $α=2$ ή $α=-4$ και $β=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 7

β) Για $α=2$ και $β=\frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$.

Μονάδες 10

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,8]$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση της μορφής $f(x)=ρ\cdot ημωx$, όπου $ρ=|α+1|>0$ και $ω=βπ>0$ (αφού $β>0$). Γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση της μορφής αυτής ισχύει ότι η μέγιστη τιμή της είναι η $ρ$ και η περίοδός της είναι η $T=\frac{2π}{ω}$.

Η συνάρτησή μας έχει μέγιστη τιμή 3, άρα ισχύει:

$$|α+1|=3\Leftrightarrow α+1=3 \text{ ή } α+1=-3\Leftrightarrow α=2 \text{ ή } α=-4.$$

Επίσης η συνάρτησή μας έχει περίοδο 4, άρα ισχύει:

$$\frac{2π}{βπ}=4\Leftrightarrow\frac{2}{β}=4\Leftrightarrow β=\frac{1}{2}$$

β) Για $α=2$ και $β=\frac{1}{2}$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=|2+1|ημ\left(\frac{1}{2}πx\right)\Leftrightarrow f(x)=3ημ\left(\frac{πx}{2}\right)$$

i. Έχουμε,

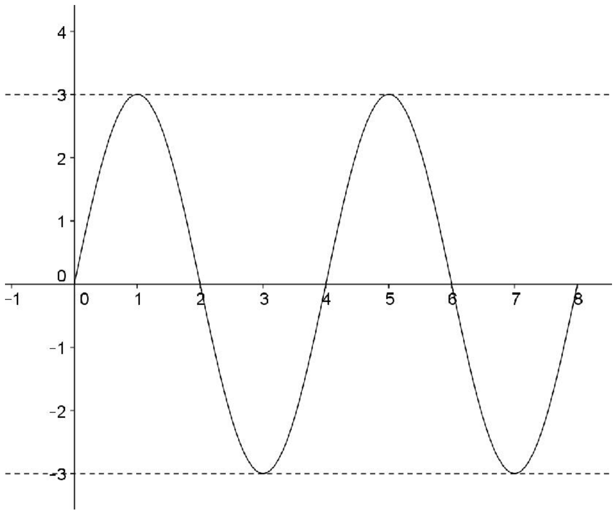
$f(x)=3 \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=3 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\frac{\pi x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi x=4k\pi+\pi \Leftrightarrow x=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=3$ έχει άπειρες λύσεις, των οποίων η μορφή είναι η

$$x=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

ii. Η $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ έχει $T=4$, μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη τιμή το -3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



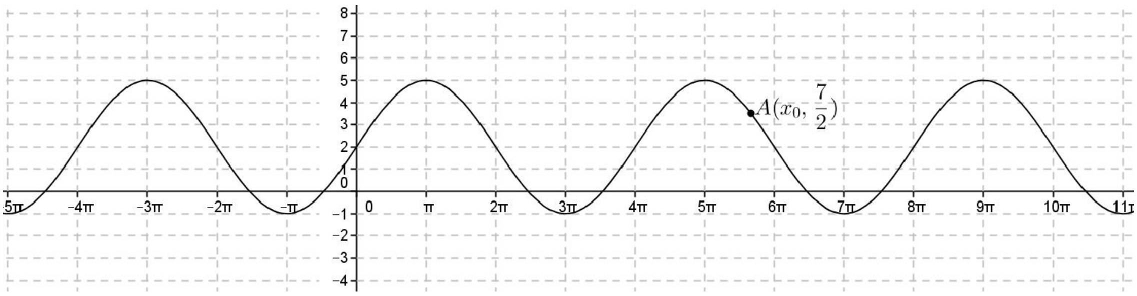
Επιπλέον το διάστημα $[0,8]$ είναι διάστημα δύο περιόδων της f, γι αυτό και η γραφική παράσταση της f εκτείνεται σε διάστημα δύο πλήρων επαναλήψεών της.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17843)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής: $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k$ με ρ,ω,k : πραγματικές σταθερές



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

Μονάδες 3

ii. την περίοδο Τ της συνάρτησης f

Μονάδες 3

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι: $\rho = 3,\ \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

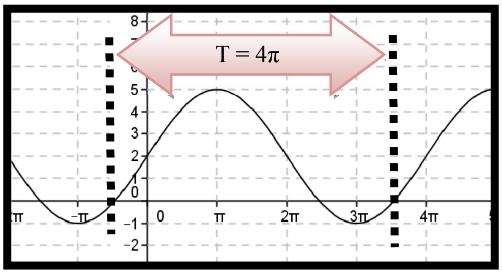
Μονάδες 10

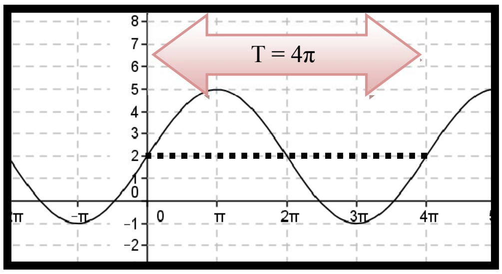
ΛΥΣΗ

α) i) Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι η παράσταση μας έχει μέγιστη τιμή το 5 και ελάχιστη τιμή το -1.

ii) **α΄ τρόπος:** Η ημιτονοειδής καμπύλης ολοκληρώνεται από $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ έως $x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{2}$, επομένως η περίοδος της είναι $T = 4\pi$.

β' τρόπος: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα επάνω. Έτσι, προκύπτει $k = 2$ και, με την βοήθεια της ευθείας $y = 2$, η περίοδος της είναι $T = 4\pi$.





β) Από το α) ii. ερώτημα έχουμε ότι $\boxed{k = 2}$ και $T = 4\pi$.

Επιπλέον, (*σύμφωνα με το αναλυτικά σχόλια στην αρχή αυτού του κεφαλαίου*), η συνάρτησή μας θα έχει μέγιστο $\rho + \kappa$ και ελάχιστο $-\rho + \kappa$.

Επομένως

$$\begin{cases} \rho + \kappa = 5 \\ -\rho + \kappa = -1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \rho + \kappa = 5 \\ 2\kappa = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho + 2 = 5 \\ \kappa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 3 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

γ) Έχουμε λοιπόν $f(x)=3\cdot ημ\frac{x}{2}+2$, για το σημείο Α, εφόσον ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, θα ισχύει τότε: $f(x_0)=\frac{7}{2}$

$$3\cdot ημ\frac{x_0}{2}+2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\cdot ημ\frac{x_0}{2}=\frac{7}{2}-2\Leftrightarrow 3\cdot ημ\frac{x_0}{2}=\frac{7-4}{2}\Leftrightarrow \boxed{ημ\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}}$$

Ψάχνουμε λοιπόν τις ρίζες της τριγωνομετρικής εξίσωσης στο διάστημα $[5\pi,6\pi]$.

$$ημ\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow ημ\frac{x_0}{2}=ημ\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_0}{2}=2κ\pi+\frac{\pi}{6},κ\in\mathbb{Z}\\ \frac{x_0}{2}=2κ\pi+\pi-\frac{\pi}{6},κ\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=4κ\pi+\frac{\pi}{3},κ\in\mathbb{Z}\\ x_0=4κ\pi+\frac{5\pi}{3},κ\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$5\pi\le 4κ\pi+\frac{\pi}{3}\le 6\pi\Leftrightarrow 5\pi-\frac{\pi}{3}\le 4κ\pi\le 6\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{14\pi}{3}\le 4κ\pi\le\frac{17\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{14}{12}\le κ\le\frac{17}{12}$$

από όπου προκύπτει ότι δεν υπάρχει $κ\in\mathbb{Z}$

$$5\pi\le 4κ\pi+\frac{5\pi}{3}\le 6\pi\Leftrightarrow 5\pi-\frac{5\pi}{3}\le 4κ\pi\le 6\pi-\frac{5\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{10\pi}{3}\le 4κ\pi\le\frac{13\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{10}{12}\le κ\le\frac{13}{12}\overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}κ=1$$

από όπου βρίσκουμε $x_0=4\pi+\frac{5\pi}{3}=\frac{17\pi}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 1-§3.5 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

Εδώ προβληματιζόμαστε…

Η άσκηση δέχεται και ως λύσεις το ρ = - 3 και $\omega=-\frac{1}{2}$, αφού

$$-3ημ\left(-\frac{x}{2}\right)=3ημ\left(\frac{x}{2}\right),$$

άρα για να ακολουθεί την θεωρία του σχολικού βιβλίου (*σχόλιο σελ. 81*), πρέπει η άσκηση να έδινε **ω θετική σταθερά**

Επίσης στο **θέμα 17852** δεν χρειάζεται να δοθεί κάτι ανάλογο, αφού αναφέρεται σε ταλάντωση και από Φυσική γνωρίζουμε ότι **ω > 0.**

Ο παραπάνω προβληματισμός ανήκει στην αγαπητή συνάδελφο **Ζωή Γερογιάννη**.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (17846)

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=συνx$ και $g(x)=συν2x$

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) και g (x), για $x \in [0, 2\pi]$.

Μονάδες 8

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Μονάδες 4

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

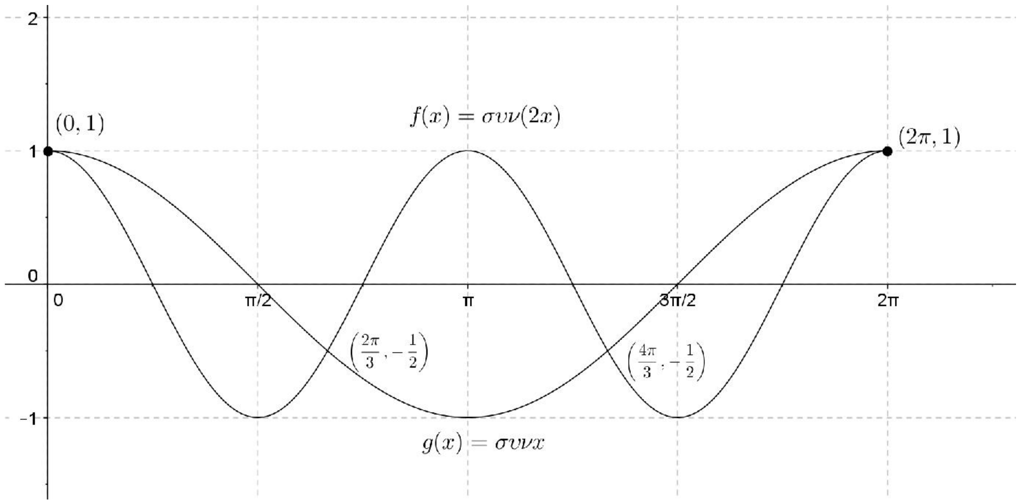
- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$
- $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$
- $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$
- $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(2\pi) = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$
- $g(0) = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$
- $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$
- $g(\pi) = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$
- $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$

- $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu3\pi=\sigma\upsilon\nu(2\pi+\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$
- $g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
- $g(2\pi)=\sigma\upsilon\nu4\pi=1$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

β) Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω



Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης είναι τα σημεία τομής των δυο γραφικών παραστάσεων στο διάστημα $[0,2\pi]$. Παρατηρούμε ότι οι δυο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε 4 σημεία , άρα 4 είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.

γ) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu2x=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2\kappa\pi+x,\ \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 2x=2\kappa\pi-x,\ \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ x=\frac{2\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Θέλουμε τις λύσεις αυτές μέσα στο διάστημα $[0,2\pi]$ επομένως θα έχουμε:

- $0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le\kappa\le1$. Άρα,
  - $\kappa=0\Rightarrow \boxed{x=0}$ ή

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$

➢ $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{2\kappa\pi}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi \le 6\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa \le 3$. Άρα,

- $\kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ ή
- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$ ή
- $\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$ ή
- $\kappa = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$ ή

Επομένως έχουμε 4 λύσεις της εξίσωσης, τις: $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$, $\boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$, $\boxed{x = 2\pi}$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g , πρέπει να βρούμε τα αντίστοιχα: $f(x)$ ή $g(x)$.

- $f(0) = συν0 = 1$, άρα $(0,1)$ το πρώτο
- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = συν\frac{2\pi}{3} = συν\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -συν\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ άρα $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ το δεύτερο
- $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = συν\frac{4\pi}{3} = συν\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -συν\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ άρα $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ το τρίτο
- $f(2\pi) = συν2\pi = 1$ άρα $(0,1)$ το τέταρτο

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4 Α΄* Ομάδας / Άσκηση 4- *§3.5* Β΄ Ομάδας / Άσκηση 1

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (17855)
Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 12 \cdot ημ\frac{\pi t}{4} + 13, \text{ όπου t ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

Μονάδες10

ΛΥΣΗ
α) Έχουμε,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{\pi} = 8 \text{ ώρες}.$$

β) Έχουμε,

$$f(5)=12\cdot ημ\frac{5\pi}{4}+13=12\cdot ημ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+13=12\cdot\left(-ημ\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+13=12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+13$$

Επομένως,

$$f(5)=13-6\sqrt{2} \text{ και } f(8)=12\cdot ημ\frac{8\pi}{4}+13=12\cdot ημ2\pi+13=12\cdot 0+13=13$$

άρα, $f(8)=13$

γ) Η ελάχιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι: $-12+13=1$, επομένως θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(t)=1$ στο διάστημα $[0,8]$.

Έχουμε,

$$f(t)=1\Leftrightarrow 12\cdot ημ\frac{\pi t}{4}+13=1\Leftrightarrow 12\cdot ημ\frac{\pi t}{4}=-12\Leftrightarrow ημ\frac{\pi t}{4}=-1\Leftrightarrow ημ\frac{\pi t}{4}=ημ\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$ημ\frac{\pi t}{4}=ημ\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi t}{4}=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\\ \text{ή}\\ \dfrac{\pi t}{4}=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=8\kappa+6,\kappa\in\mathbb{Z}\\ \text{ή}\\ t=8\kappa-2,\kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Θέλουμε τη λύση ανάμεσα στο διάστημα $[0,8]$ δηλαδή: $0\le t\le 8$

- $0\le 8\kappa+6\le 8\Leftrightarrow -6\le 8\kappa\le 2\Leftrightarrow -\frac{6}{8}\le\kappa\le\frac{2}{8}$ οπότε έχουμε $\kappa=0$, άρα $\boxed{t=6}$
- $0\le 8\kappa-2\le 8\Leftrightarrow 2\le 8\kappa\le 10\Leftrightarrow \frac{2}{8}\le\kappa\le\frac{10}{8}$ οπότε έχουμε $\kappa=1$, άρα $\boxed{t=6}$

Επομένως η ελάχιστη απόσταση από το έδαφος είναι μετά από 6 ώρες.

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (20331) (νέο θέμα: 23 Νοεμβρίου 2014)

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^\circ C$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t)=-8συν\frac{\pi t}{12}+4,\quad \text{με } 0\le t\le 24 \text{ (t ο χρόνος σε ώρες)}$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0^\circ C$.

Μονάδες 6

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t\in[0,24]$

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από $0^\circ C$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $g(t)=8\text{συν}\frac{\pi t}{12}$ είναι της μορφής $g(x)=\rho\cdot\text{συν}(\omega t)$ με $\rho=8$ και $\omega=\frac{\pi}{12}$, άρα έχει μέγιστη τιμή το $\rho=8$ και ελάχιστη τιμή το $-\rho=-8$

Η συνάρτηση $h(t)=-8\text{συν}\frac{\pi t}{12}$ έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(t)=8\text{συν}\frac{\pi t}{12}$, ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε θα έχει πάλι μέγιστη τιμή το $|\rho|=8$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|=-8$ (*απλώς όπου πριν μέγιστο τώρα ελάχιστο και όπου πριν ελάχιστο τώρα μέγιστο*).

Τέλος, η συνάρτηση $f(t)=-8\text{συν}\frac{\pi t}{12}+4$ έχει γραφική παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης h με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα επάνω.

Δηλαδή, θα έχει μέγιστη τιμή το

$$\max f(x)=|\rho|+4=8+4=12$$

και ελάχιστη τιμή το

$$\min f(x)=-|\rho|+4=-8+4=-4.$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου είναι $12°C$, ενώ η ελάχιστη θερμοκρασία $-4°C$.

β) Οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(t)=0,\ t\in[0,24]$.

Έχουμε για κάθε $t\in[0,24]$,

$$f(t)=0\Leftrightarrow -8\text{συν}\frac{\pi t}{12}+4=0\Leftrightarrow -8\text{συν}\frac{\pi t}{12}=-4$$
$$\Leftrightarrow \text{συν}\frac{\pi t}{12}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \text{συν}\frac{\pi t}{12}=\text{συν}\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi t}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ \text{ή}\ \frac{\pi t}{12}=2k\pi-\frac{\pi}{3}\right),k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{t}{12}=2k+\frac{1}{3}\ \text{ή}\ \frac{t}{12}=2k-\frac{1}{3}\right),k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow(t=24k+4\ \text{ή}\ t=24k-4),k\in\mathbb{Z}$$

Και επειδή $t\in[0,24]$ θα πρέπει

$$(0\le 24k+4\le 24\ \text{ή}\ 0\le 24k-4\le 24)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(-4\le 24k\le 20\ \text{ή}\ 4\le 24k\le 28)$$
$$\Leftrightarrow\left(-\frac{4}{24}\le k\le\frac{20}{24}\ \text{ή}\ \frac{4}{24}\le k\le\frac{28}{24}\right)$$

όμως $k\in\mathbb{Z}$ άρα,

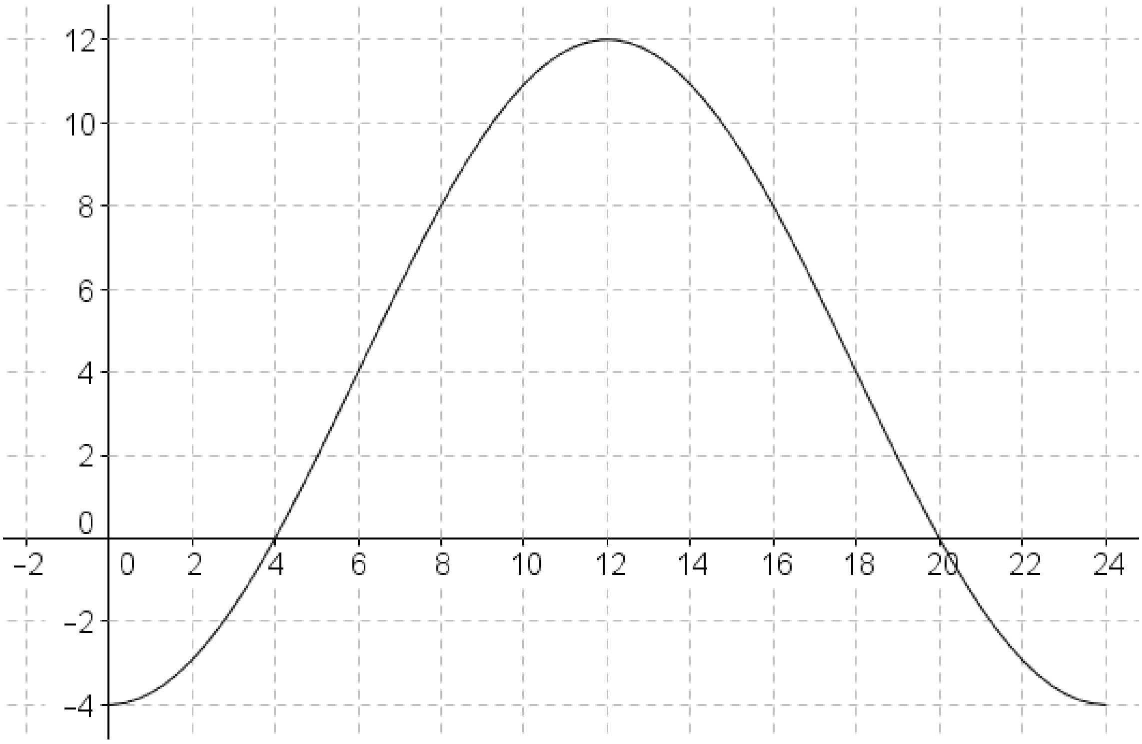
$$k=0 \text{ (για τον } 1^{o} \text{ τύπο) ή } k=1 \text{ (για τον } 2^{o} \text{ τύπο)}$$

Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$t_1 = 24\cdot 0 + 4 \Leftrightarrow t_1 = 4 \text{ και } t_2 = 24\cdot 1 - 4 \Leftrightarrow t_2 = 20,$$

δηλαδή οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$ είναι στις $t_1 = 4$ και $t_2 = 20$

γ) Η γραφική παράσταση της f για $t \in [0,24]$ είναι:



δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, η θερμοκρασία είναι πάνω από $0°C$ σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα $(4,20)$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (20338) (νέο θέμα: 23 Νοεμβρίου 2014)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Μονάδες 4

β) Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

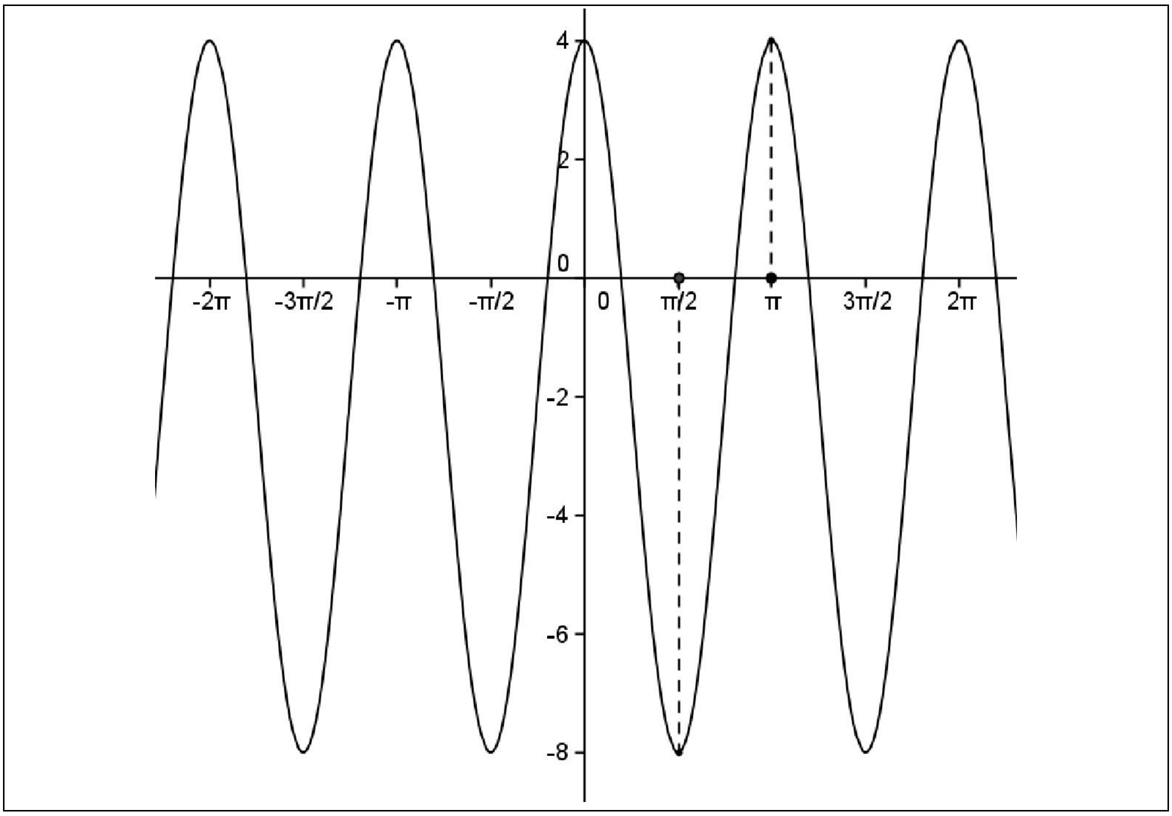
Μονάδες 4

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: α = –2 και β = 6.

Μονάδες 8

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα [0, 2π]

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση η μέγιστη τιμή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι 4, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι -8.

β) Αλγεβρική λύση

Η περίοδος της συνάρτησης $g(x) = \text{συν}\omega x$, βρίσκεται από τη σχέση $T = \frac{2\pi}{\omega}$ όπου η σταθερά $\omega > 0$ την καθορίζει. Συνεπώς η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ αφού $\omega = 2$

Γεωμετρική λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \pi$, αφού κάθε διάστημα π, η γραφική παράσταση της f επαναλαμβάνεται.

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση 0 μέγιστο ίσο με 4 και στη θέση $\frac{\pi}{2}$ ελάχιστο ίσο με -8. Επομένως είναι

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4 \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 \Leftrightarrow \alpha + \beta \cdot \text{συν}\pi = -8 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -8$$

Για να βρούμε τους αριθμούς α, β λύνουμε το σύστημα,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = -8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -4 \\ \alpha - \beta = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

δ) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 6$ ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται $f(x) = -2 + 6 \cdot \text{συν}2x$. Για να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία (εφόσον υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f με την ευθεία $y = 1$ ουσιαστικά ψάχνουμε τα x (εφόσον υπάρχουν) για τα οποία το y θα είναι 1.
Επομένως λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=1 \Leftrightarrow -2+6\cdot συν2x=1 \Leftrightarrow 6\cdot συν2x=3 \Leftrightarrow συν2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συν2x=συν\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2κ\pi+\frac{\pi}{3} \\ ή \\ 2x=2κ\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=κ\pi+\frac{\pi}{6} \\ ή \\ x=κ\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}, κ\in\mathbb{Z}$$

όμως $x\in[0,2\pi]$, άρα

$$0\le κ\pi+\frac{\pi}{6}\le 2\pi \overset{:\pi}{\Leftrightarrow} 0\le κ+\frac{1}{6}\le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le κ\le 2-\frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le κ\le\frac{11}{6}$$

Όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα $κ=0$ ή $κ=1$.

Επομένως για $κ=0$ είναι $x=\frac{\pi}{6}$ ενώ για $κ=1$ είναι $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

Ομοίως,

$$0\le κ\pi-\frac{\pi}{6}\le 2\pi \overset{:\pi}{\Leftrightarrow} 0\le κ-\frac{1}{6}\le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le κ\le 2+\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le κ\le\frac{13}{6}$$

Όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα $κ=1$ ή $κ=2$

Επομένως για $κ=1$ είναι $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ και για $κ=2$ είναι $x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

Συμπερασματικά τα κοινά σημεία της γραφική παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία y=1 είναι τα σημεία

$$A\left(\frac{\pi}{6},1\right), A\left(\frac{5\pi}{6},1\right), A\left(\frac{7\pi}{6},1\right), A\left(\frac{11\pi}{6},1\right)$$

♦ Παρόμοιες Ασκήσεις:

♦ Σχολικό βιβλίο: § 3.5 Β Ομάδας/ Άσκηση 3,5

§3.6 - Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17664) (νέο θέμα: 23 Νοεμβρίου 2014)
Δίνονται οι γωνίες ω, θ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$\omega + \theta = 135^o.$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = -1$

Μονάδες 10

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ
α) Επειδή $\omega + \theta = 135^o$ έχουμε,

$$\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \varepsilon\varphi 135^o = \varepsilon\varphi(180^o - 45^o) = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$$

(διότι οι γωνίες με άθροισμα 180^o έχουν αντίθετες εφαπτόμενες).

β) Ισχύει ο γενικός τύπος $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta}$.

Όμως $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = -1$, άρα

$$-1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta - 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: -

Σημείωση: Το παραπάνω θέμα είχε αφαιρεθεί και ξαναπροστέθηκε στη Τράπεζα θεμάτων, αφού συμπληρώθηκαν οι περιορισμοί για το συνημίτονο, έτσι ώστε να ορίζονται οι εφαπτόμενες στις γωνίες ω και θ.

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19911)
α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{2} \cdot \eta\mu x$

Μονάδες 13

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x = 0$$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ
α) Από τους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών παραστάσεων, γνωρίζουμε ότι:

$$\etaμ(α+β)=\etaμα\cdot συνβ+συνα\cdot \etaμβ,$$

άρα,

$$\etaμ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\etaμx\cdot συν\frac{\pi}{3}+συνx\cdot \etaμ\frac{\pi}{3}=\etaμx\cdot\frac{1}{2}+συνx\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot συνx+\frac{1}{2}\cdot \etaμx$$

β) Έχουμε,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot συνx+\frac{1}{2}\cdot \etaμx=0\overset{α)}{\Leftrightarrow}\etaμ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \etaμ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\etaμ0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+(\pi-0),\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \\ x=2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Όμως πρέπει οι λύσεις της εξίσωσης να ανήκουν στο διάστημα $(0,\pi)$, οπότε πρέπει:

$$0<x<\pi\Leftrightarrow 0<2k\pi+\frac{2\pi}{3}<\pi\overset{:\pi}{\Leftrightarrow}0<2k+\frac{2}{3}<1\overset{-\frac{2}{3}}{\Leftrightarrow}-\frac{2}{3}<2k<\frac{1}{3}\overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}k=0$$

Τότε, για $k=0$, η εξίσωση έχει λύση $x=\frac{2\pi}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.6* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3,6-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 9

§3.7 - Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (19912)

Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι: $-\text{συν}2\omega + 5\text{ημ}\omega - 2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\text{ημ}^2\omega + 5\text{ημ}\omega - 3 = 0$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $\text{ημ}\omega = \frac{1}{2}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α (§3.7) γνωρίζουμε ότι

$$\text{συν}2\omega = 1 - \text{ημ}^2\omega \ (1).$$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$-\text{συν}2\omega + 5\text{ημ}\omega - 2 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} -\left(1 - \text{ημ}^2\omega\right) + 5\text{ημ}\omega - 2 = 0 \Rightarrow 2\text{ημ}^2\omega + 5\text{ημ}\omega - 3 = 0 \ (2)$$

β) Η εξίσωση $2\text{ημ}^2\omega + 5\text{ημ}\omega - 3 = 0$ (2), αν θέσουμε $\text{ημ}\omega = x$ (3) (άρα $-1 \le x \le 1$), οδηγείται στην βοηθητική εξίσωση

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \ (4).$$

Η διακρίνουσα της είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0,$$

άρα η (4) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ή

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 < -1$$

και έτσι απορρίπτεται.

Άρα

$$x = \frac{1}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \text{ημ}\omega = \frac{1}{2}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: §3.7 Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3,5-§3.3 Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17838)

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\text{συν}2\omega + 28\text{συν}\omega + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\text{συν}\omega = -\dfrac{4}{5}$.

Μονάδες 10

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\dfrac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i) να δείξετε ότι $\text{συν}2\omega = \dfrac{7}{25}$ και $\text{ημ}2\omega = -\dfrac{24}{25}$

Μονάδες 8

ii) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13\cdot\left[\text{ημ}^2 2\omega + \text{συν}^2 2\omega\right] + 12}{18\cdot \text{εφ}2\omega\cdot\text{σφ}2\omega + 25\left[\text{ημ}2\omega + \text{συν}2\omega\right]}$$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$5\text{συν}2\omega + 28\text{συν}\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow 5\left(2\text{συν}^2\omega - 1\right) + 28\text{συν}\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10\text{συν}^2\omega - 5 + 28\text{συν}\omega + 21 = 0 \Leftrightarrow 10\text{συν}^2\omega + 28\text{συν}\omega + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\text{συν}^2\omega + 14\text{συν}\omega + 8 = 0.$$

Θέτουμε $y = \text{συν}\omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$5y^2 + 14y + 8 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς y με διακρίνουσα

$$\Delta = 14^2 - 4\cdot 5\cdot 8 = 196 - 160 = 36 > 0,$$

συνεπώς έχει δύο διαφορετικές ρίζες που βρίσκονται από τον τύπο:

$$y_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 5} = \frac{-14 \pm 6}{10}$$

δηλαδή $y = \dfrac{-14+6}{10} = \dfrac{-8}{10} = -\dfrac{4}{5}$ ή $y = \dfrac{-14-6}{10} = \dfrac{-20}{10} = -2$.

Συνεπώς ισχύει

$$\text{συν}\omega = -\frac{4}{5} \text{ ή } \text{συν}\omega = -2, \text{ άτοπο (αφού } -1 \le \text{συν}\omega \le 1\text{)},$$

άρα $\text{συν}\omega = -\dfrac{4}{5}$.

β) i. Ισχύει

$$\text{ημ}^2\omega = 1 - \text{συν}^2\omega \Rightarrow \text{ημ}^2\omega = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{ημ}^2\omega = \frac{9}{25}$$

και αφού $\dfrac{\pi}{2} < \omega < \pi$, ισχύει ότι $\text{ημ}\omega > 0$ συνεπώς

$$ημ^2ω=\frac{9}{25}\Rightarrow ημω=+\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

τότε,

$$συν2ω=2συν^2ω-1\Rightarrow συν2ω=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$$

και

$$ημ2ω=2ημωσυνω\Rightarrow ημ2ω=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

ii. Από τη θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα γνωρίζουμε ότι

$$ημ^2 2ω+συν^2 2ω=1,$$

ενώ ισχύει και ότι $εφ2ω\cdot σφ2ω=1$, συνεπώς η παράσταση Π γίνεται:

$$Π=\frac{13\cdot\left[ημ^2 2ω+συν^2 2ω\right]+12}{18\cdot εφ2ω\cdot σφ2ω+25\left[ημ2ω+συν2ω\right]}=\frac{13\cdot 1+12}{18\cdot 1+25\cdot\left(-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\right)}=$$

$$\frac{13\cdot 1+12}{18\cdot 1+25\cdot\left(-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\right)}=\frac{25}{18+25\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)}=\frac{25}{18-17}=\frac{25}{1}=25.$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 10 -*§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2